Esercitazione del 19 novembre 2014

Esercizio 1. Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

calcolare AB, BA e $A+B$.
Svolgimento. Si ha

$$AB = \begin{pmatrix} 1\cdot 3 + 2\cdot(-1) & 1\cdot 0 + 2\cdot 4 \\ 3\cdot 3 + (-1)\cdot(-1) & 3\cdot 0 + (-1)\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 10 & -4 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 3\cdot 1 + 0\cdot 3 & 3\cdot 2 + 0\cdot(-1) \\ (-1)\cdot 1 + 4\cdot 3 & (-1)\cdot 2 + 4\cdot(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 11 & -6 \end{pmatrix}$$

e

$$A+B = \begin{pmatrix} 1+3 & 2+0 \\ 3+(-1) & (-1)+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2. Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

calcolare $A+B$ e A^2.
Svolgimento. Si ha

$$A+B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \text{ e } A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$$

Esercizio 3. Date le matrici

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 & -3 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ e } A_2 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -8 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

calcolare A_2A_1.
Svolgimento. Si ricordi che una matrice è detta $n \times m$ se ha n righe e m colonne. Inoltre è possibile moltiplicare due matrici A e B solamente se

- A è del tipo $n \times m$
- B è del tipo $m \times k$

(cioè se il numero delle colonne di A è uguale al numero delle righe di B); il risultato è una matrice C del tipo $n \times k$. Si ha

$$A_2A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -7 & -15 & 13 \\ 35 & -21 & -40 & 28 \end{pmatrix}$$

Si noti che non è definito il prodotto A_1A_2.

Esercizio 4. Stabilire se i vettori $v_1 = (1, 5, 7)$ e $v_2 = (1, 3, 4)$ di $\mathbb{R}^3$ sono linearmente dipendenti.
Svolgimento. I vettori dati sono linearmente indipendenti poiché

$$a(1, 5, 7) + b(1, 3, 4) = (0, 0, 0) \longrightarrow (a + b, 5a + 3b, 7a + 4c) = (0, 0, 0) \Longleftrightarrow a = b = 0.$$

Esercizio 5. Discutere la dipendenza o l'indipendenza lineare dei vettori

$$v_1 = (1, 2, -2) \qquad v_2 = (1, 1, -3) \qquad v_3 = (3, 7, k - 6)$$

al variare del parametro k.
Svolgimento. Dal sistema

$$\begin{cases} a + b + 3c = 0 \\ 2a + b + 7c = 0 \\ -2a - 3b + (k - 6)c = 0 \end{cases}$$

si ha che

- se $k = 1$ si ha $(a, b, c) = t(-4, 1, 1)$ con $t \in \mathbb{R}$ e dunque i vettori sono linearmente dipendenti;
- se $k \neq 1$ si ha $(a, b, c) = (0, 0, 0)$ e i vettori sono linearmente indipendenti.

Esercizio 6. I vettori

$$v_1 = (2, 3, 1) \qquad v_2 = (-1, 4, 2) \qquad v_3 = (5, 2, 0)$$

sono linearmente dipendenti poiché $v_3 = 2v_1 - v_2$.

Esercizio 7. Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ k & 1 & 1 \\ k & 1 & k \end{pmatrix}$$

risulta

$$\det A = 1(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & k \end{vmatrix} + 1(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} k & 1 \\ k & k \end{vmatrix} + 0(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} k & 1 \\ k & 1 \end{vmatrix} = -(k - 1)^2$$

La matrice risulta quindi invertibile se $\det A \neq 0$ ovvero se $k \neq 1$.

Esercizio 8. Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ t & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

stabilire per quali valori di t la matrice A è invertibile.
Svolgimento. A è invertibile se il suo determinante è diverso da zero, ovvero se il suo rango è 3; si ha

$$\det A = 2t - 3$$

La matrice risulta quindi invertibile se $\det A \neq 0$ ovvero se $t \neq \frac{3}{2}$.

Esercizio 9. Determinare le equazioni parametriche e l'equazione cartesiana della retta del piano passante per i punti $A = (1, 2)$ e $B = (-1, 3)$.
Svolgimento. Poiché $\overrightarrow{AB} = (-2, 1)$ si ha $r : \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 + t \end{cases}$ da cui, eliminando t, si ha $r : x + 2y - 5 = 0$.

Esercizio 10. La retta r per $P = (4, -3)$ parallela al vettore $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ ha equazione $r : \begin{cases} x = 4 - t \\ y = 2t - 3 \end{cases}$

Esercizio 11. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathcal{V}^2$, dati i vettori

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k} \qquad \mathbf{v}_2 = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$$

determinare l'angolo tra i due vettori.
Svolgimento. La lunghezza, o modulo, di $\mathbf{v}_1$ è data da $\sqrt{1 + 4 + 25}$; la lunghezza, o modulo, di $\mathbf{v}_2$ è data da $\sqrt{9 + 1 + 4}$. Dalla definizione di prodotto scalare di due vettori

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = |\mathbf{v}_1||\mathbf{v}_2| \cos \widehat{\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2}$$

da cui

$$\cos \widehat{\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2} = -\frac{3}{70}\sqrt{105}$$

e quindi $\widehat{\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2} = \arccos(-\frac{3}{70}\sqrt{105})$.

Esercizio 12. Determinare i valori del parametro t in modo che i vettori

$$\mathbf{v}_1 = 3\mathbf{i} + t\mathbf{j} - 2\mathbf{k} \qquad \mathbf{v}_2 = 6\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$$

risultino ortogonali.
Svolgimento. Affinché i vettori dati risultino ortogonali, il loro prodotto scalare (dato dalla somma dei prodotti delle componenti) deve annullarsi; deve dunque essere $18 - 4t + 6 = 0$ da cui $t = 6$.

Esercizio 13. Determinare un vettore di modulo 3 parallelo al vettore $\mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.
Svolgimento. Un vettore parallelo a $\mathbf{v}$ ha componenti $(a, -a, 2a)$ con $a \in \mathbb{R}$; poiché si richiede un vettore di modulo 3 deve aversi $\sqrt{a^2 + a^2 + 4a^2} = 3$ da cui $a = \frac{\sqrt{6}}{2}$. Pertanto un vettore che risponde al problema è $\mathbf{w} = \frac{1}{2}\sqrt{6}\mathbf{i} - \frac{1}{2}\sqrt{6}\mathbf{j} + \sqrt{6}\mathbf{k}$.