Esercitazione del 26 novembre 2014

Esercizio 1. Determinare la matrice A sapendo che vale l'uguaglianza $(2I - A^{-1})^t = 3\left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$.
Svolgimento. Si ha

$$\left[(2I - A^{-1})^t\right]^t = \left[3\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\right]$$

da cui $A^{-1} = 2I - 3\left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} -4 & -3 \\ -9 & -5 \end{smallmatrix}\right)$ da cui

$$A = (A^{-1})^{-1} = \left[\begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -9 & 5 \end{pmatrix}\right]^{-1} = -\frac{1}{47}\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 9 & -4 \end{pmatrix}$$

Infatti se $B = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$, si ha $(B^t)^t = B$ e $B^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\left(\begin{smallmatrix} d & -b \\ -c & a \end{smallmatrix}\right)$.

Esercizio 2. Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & k \\ 1 & 1 & 2k \\ 0 & -k & 1 \end{pmatrix}$$

risulta

$$\det A = 1(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 2k \\ -k & 1 \end{vmatrix} + 1(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & k \\ -k & 1 \end{vmatrix} + 0(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & k \\ 1 & 2k \end{vmatrix} = k^2 - 1$$

La matrice è invertibile se $\det A \neq 0$ ovvero se $k \neq \pm 1$.

Esercizio 3. Dati i vettori $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ e $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, calcolare $\mathbf{w} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$; determinare, inoltre, le componenti dei versori perpendicolari ai vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.
Svolgimento. Si ha

$$\mathbf{w} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$$

che, per definizione, è perpendicolare ai vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$; i versori perpendicolari a $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono $\mathbf{w}' = \frac{\mathbf{w}}{|\mathbf{w}|} = \frac{1}{\sqrt{21}}(2, 1, 4)$ e $\mathbf{w}'' = -\frac{\mathbf{w}}{|\mathbf{w}|} = -\frac{1}{\sqrt{21}}(2, 1, 4)$.

Esercizio 4. Determinare se i vettori $\mathbf{v}_1 = (1, 0, -3)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 2, 5)$, $\mathbf{v}_3 = (5, 4, 1)$ sono complanari.
Svolgimento. Si ha

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

quindi i tre vettori sono complanari.

Esercizio 5. Il segmanto di estremi $P_1 = (2, 5)$ e $P_2 = (0, -3)$ è $\overrightarrow{P_1P_2} = (-2, -8)$ ed è parallelo al segmento $\overrightarrow{P_1'P_2'} = (1, 4)$ di estremi $P_1' = (2, 3)$ e $P_2' = (3, 7)$, in quanto $\overrightarrow{P_1P_2} = -2\overrightarrow{P_1'P_2'}$.

Esercizio 6. Decomporre il vettore $v = (1, -3)$ in due vettori paralleli, rispettivamente, alle rette $t : 2x - y - 1 = 0$ e $s : \begin{cases} x = -3t + 1 \\ y = -t \end{cases}$

Svolgimento. I parametri direttori della retta $ax + by + c = 0$ sono $(l, m) = (-b, a)$, mentre i parametri direttori della retta $\begin{cases} x = x_0 + tl \\ y = y_0 + tm \end{cases}$ sono l ed m; quindi i parametri direttori di t sono $l_t = 1$ e $m_t = 2$, quelli di s sono $l_s = 3$ e $m_s = 1$; dunque se $(-2, 5) = \alpha(1, 2) + \beta(3, 1)$, si ha $\alpha = \frac{17}{5}$ e $\beta = -\frac{9}{5}$. I due vettori cercati sono quindi $\frac{17}{5}(1, 2)$ e $-\frac{9}{5}(3, 1)$.