

MAT1 - Matematica 1

PROVA D'ESAME - TERZO APPELLO (19-04-2017)

ESERCIZIO 1. [4+2] Si calcoli il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x+x^2) - \ln(1+x-x^2)}{2x^2}.$$

FACOLTATIVO: si calcoli il limite con un metodo diverso da quello usato precedentemente.

ESERCIZIO 2. [3+1] Data la funzione

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 1},$$

(2.1) se ne determini il dominio D_f ;

(2.2) si calcoli la derivata prima $f'(x)$ dove la funzione $f(x)$ è definita e derivabile;

(2.3) si dimostri che la funzione $f(x)$ è decrescente ove definita.

FACOLTATIVO: indicando con C_f il codominio di f , si dimostri che $f: D_f \rightarrow C_f$ è invertibile.

ESERCIZIO 3. [4+2] Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

(3.1) si calcoli $\det A$ e se ne deduca che 0 è un autovalore di A ;

(3.2) si determinino gli altri autovalori di A ;

(3.3) si determini l'autovettore di A associato all'autovalore 0;

(3.4) si determinino gli altri autovettori di A .

FACOLTATIVO: si calcoli gli autovalori di A^4 .

ESERCIZIO 4. [4+1] Dati i due vettori nello spazio $\vec{v} = (2, 2, 1)$ e $\vec{w} = (2, 2, 4)$,

(4.1) si determinino i vettori $\vec{a} = 2\vec{v} - \vec{w}$ e $\vec{b} = \vec{v} + 2\vec{w}$;

(4.2) si calcoli il prodotto scalare $\vec{v} \cdot \vec{w}$;

(4.3) si determini l'angolo φ compreso tra i vettori \vec{v} e \vec{w} ;

(4.4) si calcoli il prodotto vettoriale $\vec{v} \wedge \vec{w}$.

FACOLTATIVO: si discuta se i vettori \vec{a} e \vec{b} sono linearmente indipendenti.

ESERCIZIO 5. [5] Si calcoli l'integrale definito

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin t \cos t}{\cos^2 t + 2 \sin^2 t} dt.$$

ESERCIZIO 6. [10] Data la funzione

$$f(x) = \ln \left(e^{-x} \sqrt{1 + e^{2x}} \right),$$

(6.1) se ne determini il dominio,

(6.2) si individuino eventuali punti di massimo, di minimo e di flesso,

(6.3) si discuta dove la funzione è crescente o decrescente,

(6.4) si discuta dove la funzione è convessa o concava,

(6.5) si studi l'esistenza di eventuali asintoti,

(6.6) si disegni il grafico.

**Ogni foglio consegnato deve contenere: nome e cognome, numero di matricola, firma.
Non è consentito l'uso di libri, quaderni, appunti, telefonini e calcolatrici grafiche.**