

MAT1 - Matematica 1

PROVA D'ESAME - QUARTO APPELLO (30-06-2016)

ESERCIZIO 1. [4+2] Si calcoli il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x+2x^2) - \log(1+x+x^2)}{\log(1+2x^2) - \log(1+x^2)}.$$

FACOLTATIVO: si calcoli il limite con un metodo diverso da quello usato precedentemente.

ESERCIZIO 2. [3+2] Data la funzione

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3},$$

(2.1) se ne calcoli il dominio D_f ;

(2.2) si calcoli la derivata $f'(x)$ ove definita;

(2.3) si dimostri che $f'(x) > 0$ per $x > 3$.

FACOLTATIVO: si trovino, se esistono, massimo e minimo di $f(x)$ nell'intervallo $[4, 5]$.

ESERCIZIO 3. [4+1] Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

(3.1) si calcoli $\det A$ e se ne deduca che A ha autovalore $\lambda_1 = 0$;

(3.2) si determinino gli altri due autovalori λ_2 e λ_3 di A ;

(3.3) si determini l'autovettore di A associato all'autovalore λ_1 .

FACOLTATIVO: si determinino gli autovalori della matrice A^2 .

ESERCIZIO 4. [4+1] Dati i due vettori nello spazio $\vec{v} = (1, 2, 0)$ e $\vec{w} = (1, 0, 2)$,

(4.1) si determinino i vettori $\vec{a} = \vec{v} + \vec{w}$ e $\vec{b} = 3\vec{v} - \vec{w}$;

(4.2) si calcoli il prodotto scalare $\vec{v} \cdot \vec{w}$;

(4.3) si determini l'angolo φ compreso tra i vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$;

(4.4) si calcoli il prodotto vettoriale $\vec{v} \wedge \vec{w}$.

FACOLTATIVO: si discuta se i vettori $\vec{v}$, $\vec{w}$ e $\vec{a}$ sono linearmente indipendenti.

ESERCIZIO 5. [5] Si calcoli l'integrale indefinito

$$\int \frac{\sin 2t}{\cos^2 t + 2 \sin^2 t} dt.$$

[Suggerimento. Può essere utile usare la formula trigonometrica $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$.]

ESERCIZIO 6. [10] Data la funzione

$$f(x) = e^{-x} \sqrt{1 + e^{2x}},$$

(6.1) se ne determini il dominio,

(6.2) si individuino eventuali punti di massimo, di minimo e di flesso,

(6.3) si discuta dove la funzione è crescente e dove è decrescente,

(6.4) si discuta dove è convessa e dove è concava,

(6.5) si studi l'esistenza di eventuali asintoti,

(6.6) si disegni il grafico.

Ogni foglio consegnato deve contenere: nome e cognome, numero di matricola, firma.

Non è consentito l'uso di libri, quaderni, appunti, telefonini e calcolatrici grafiche.