

MAT1 - Matematica 1

PROVA D'ESAME - TERZO APPELLO (14-4-2015)

ESERCIZIO 1. [4+2] Si calcoli il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1+x-x^2}}{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}.$$

FACOLTATIVO: si calcoli il limite con un metodo diverso da quello usato precedentemente.

ESERCIZIO 2. [10] Si studi il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{x^4}{4} - x^2 + \ln(1+x^2).$$

In particolare si determini il dominio della funzione, si discuta dove la funzione è crescente o decrescente, convessa o concava e si studi l'esistenza di eventuali asintoti.

ESERCIZIO 3. [5+2] Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix},$$

(3.1) si calcoli il determinante di A ;

(3.2) si discuta se esista la trasposta di A e in caso affermativo la si calcoli;

(3.3) si discuta se esista l'inversa di A e in caso affermativo la si calcoli;

(3.4) si determinino gli autovalori di A ;

(3.5) si determinino gli autovalori di A^2 .

FACOLTATIVO: si determinino gli autovettori della matrice A .

ESERCIZIO 4. [4+1] Dati i due vettori nello spazio $\vec{v} = (1, 3, 2)$ e $\vec{w} = (4, 0, 1)$,

(4.1) si determi il vettore $\vec{a} = 5\vec{v} - 2\vec{w}$;

(4.2) si calcoli il prodotto scalare $\vec{v} \cdot \vec{w}$;

(4.3) si determini l'angolo φ compreso tra i vettori \vec{v} e \vec{w} ;

(4.4) si calcoli il prodotto vettoriale $\vec{v} \wedge \vec{w}$.

FACOLTATIVO: si mostri che $\vec{a} \wedge \vec{v} + \vec{a} \wedge \vec{w} = 7\vec{v} \wedge \vec{w}$.

ESERCIZIO 5. [5] Si calcoli l'integrale definito

$$\int_0^{\pi/2} \sin x \cos x e^{\sin x} dx.$$

ESERCIZIO 6. [3+2] Si consideri la funzione

$$f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}.$$

(6.1) Se ne trovi il dominio D_f .

(6.2) Si mostri che la funzione $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ non è suriettiva.

(6.3) Si mostri che la funzione $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ è iniettiva.

FACOLTATIVO: si trovi un sottoinsieme J di \mathbb{R} tale che $f : D \rightarrow J$ sia suriettiva.

**Ogni foglio consegnato deve contenere: nome, numero di matricola, firma.
Non è consentito l'uso di libri, quaderni, appunti, telefonini e calcolatrici grafiche.**