

MAT1 - Matematica 1

PRIMA PROVA D'ESONERO - COMPITO A (13-11-2014)

ESERCIZIO 1. [4+2] Si determini il dominio di due delle seguenti funzioni:

$$f_1(x) = \ln \left(\frac{(x-1)\sqrt{x}}{x^2 + 2x + 4} \right), \quad f_2(x) = \sqrt{e^x(1-e^x)\ln x}, \quad f_3(x) = \sqrt{|x-2| - |x+3|}.$$

FACOLTATIVO: Si determini il dominio dell'altra funzione.

ESERCIZIO 2. [4+4] Si considerino le funzioni f e g definite da

$$f(x) = \ln x - \ln(x+1), \quad g(x) = e^x.$$

(2.1) Se ne calcolino i domini D_f e D_g , rispettivamente;

(2.2) si determini la funzione $h = f \circ g$ e si verifichi che h è strettamente crescente

(2.3) si determini il dominio D_h della funzione h ;

(2.4) si determini il codominio C_h di h e si discuta se la funzione $h: D_h \rightarrow C_h$ sia invertibile.

FACOLTATIVO: Si studi il grafico della funzione composta $h(x)$.

ESERCIZIO 3. [4+2] Si calcolino le derivate prime delle seguenti funzioni:

$$f_1(x) = \sqrt{(x-2)(x-1)}, \quad f_2(x) = \ln \left(\frac{x^2 - 2}{x^2 + 2} \right).$$

FACOLTATIVO: Si calcolino le derivate seconde delle due funzioni.

ESERCIZIO 4. [4+2] Si calcoli uno dei due seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(1+x) - x \ln(1-x)}{e^{-x} - (x^2 - x + 1)e^{-x^2}}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2) - \sin(1 - \cos x)}{\sin(x+x^2) - \sin x - 2(\cos x - 1)}.$$

FACOLTATIVO: Si calcoli anche l'altro limite.

ESERCIZIO 5. [4+2] Si consideri la funzione

$$f(x) = x|x-1| - (x-1)|x|.$$

(5.1) si verifichi che $f(x) = 0$ per $x \leq 0$ e $x \geq 1$;

(5.2) si verifichi che $f(x) > 0$ per $x \in (0, 1)$;

(5.3) si discuta se la funzione è continua.

FACOLTATIVO: Si trovino massimo e minimo della funzione $f(x)$.

ESERCIZIO 6. [10] Si studi il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{x e^{-x}}{x-1}.$$

In particolare (i) si determini il dominio della funzione, (ii) si discuta dove la funzione è crescente o decrescente, (iii) si discuta dove è convessa o concava e (iv) si studi l'esistenza di eventuali asintoti.

**Ogni foglio consegnato deve contenere: nome, numero di matricola, firma.
Non è consentito l'uso di libri, quaderni, appunti, telefonini e calcolatrici grafiche.**