

MAT1 - Matematica 1

SECONDA PROVA D'ESONERO (13-01-2015)

ESERCIZIO 1. [5+2] Dati i due vettori nello spazio $\vec{v} = (1, 1, 1)$ e $\vec{w} = (2, 2, 1)$, si calcolino:

- (i) il vettore $\vec{a} = 4\vec{v} - 2\vec{w}$;
- (ii) il prodotto scalare $\vec{v} \cdot \vec{w}$ e l'angolo φ compreso tra i due vettori;
- (iii) i prodotti vettoriali $\vec{v} \wedge \vec{w}$ e $\vec{v} \wedge \vec{a}$.

FACOLTATIVO: si individui un vettore \vec{b} ortogonale sia a \vec{v} che a \vec{w} e si discuta se i tre vettori \vec{v} , \vec{w} e \vec{b} sono linearmente indipendenti.

ESERCIZIO 2. [5] Nel piano xy sia r la retta di equazione $x - 3y + 1 = 0$ e P il punto di coordinate $P = (4, 5)$.

- (i) Si determini un vettore \vec{v} parallelo alla retta r ;
- (ii) si determini un vettore \vec{w} ortogonale a \vec{v} ;
- (iii) si determini la retta s ortogonale a r e passante per il punto P ;
- (iv) si calcolino le coordinate del punto d'intersezione Q tra le due rette r e s ;
- (v) si calcoli la distanza del punto P dalla retta r .

ESERCIZIO 3. [5+2] Date le due matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

- (i) si calcoli la matrice $S = A + B$;
- (ii) si studi se le tre matrici A , B e S commutano tra loro;
- (iii) si calcolino la matrice $C = A + B^T$, dove B^T è la trasposta di B , e il suo quadrato C^2 ;
- (iv) si determinino autovalori e autovettori di C .

FACOLTATIVO: si determinino autovalori e autovettori delle matrici A , B e S .

ESERCIZIO 4. [5+2] Si calcoli il seguente integrale indefinito

$$\int \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}} dx.$$

FACOLTATIVO: Si usi il risultato per calcolare l'integrale indefinito $\int \frac{x e^x}{\sqrt{e^x - 1}} dx$.

ESERCIZIO 5. [5+2] Si calcoli uno dei seguenti integrali definiti:

$$\int_1^3 \frac{\ln x \cos(\ln x)}{x} dx, \quad \int_3^4 \frac{dx}{x(x^2 - 3x + 2)}.$$

ESERCIZIO 6. [5] Si calcoli il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \ln(x+1-x^2)}{1 - \cos x},$$

utilizzando la formula di Taylor.

**Ogni foglio consegnato deve contenere: nome, numero di matricola, firma.
Non è consentito l'uso di libri, quaderni, appunti, telefonini e calcolatrici grafiche.**