MAT1 - Matematica 1

PRIMA PROVA D'ESONERO - COMPITO A (12-11-2015)

ESERCIZIO 1. [4+2] Si determini il dominio di due delle seguenti funzioni:

$$f_1(x) = \sqrt{(x^2 - 1)(e^x - 1)}, \quad f_2(x) = \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}, \quad f_3(x) = \sqrt{|x + 1| - |x - 1|}.$$

FACOLTATIVO: Si determini il dominio dell'altra funzione.

ESERCIZIO 2. [10] Si studi il grafico della funzione

$$f(x) = \ln \left(\frac{x - 1}{x + 2} \right).$$

In particolare (i) si determini il dominio D_f della funzione, (ii) si discuta dove la funzione f è crescente o decrescente, (iii) si discuta dove f è convessa o concava e (iv) si studi l'esistenza di eventuali asintoti.

ESERCIZIO 3. [4+2] Si calcolino le derivate prime delle seguenti funzioni:

$$f(x) = \frac{x(x^2 - 1)}{x^2 + 1}, \quad g(x) = \frac{x(x - 1)}{\sqrt{x^2 + x + 2}}.$$

FACOLTATIVO: Si calcolino le derivate seconde delle due funzioni.

ESERCIZIO 4. [5+3] Si calcoli uno dei due seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + 1} - \sqrt{x + 1 - x^2}}{e^{x+x^2} - e^x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(\sin x) + \cos(\sin x) - 1}{2 \cos x - \cos(2x) - 1}.$$

FACOLTATIVO: Si calcoli anche l'altro limite.

ESERCIZIO 5. [5+2] Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{1}{(x - 1)(x - 2)}.$$

- (5.1) Si determini il dominio D_f di f ;
- (5.2) si discuta dove f è continua e dove è derivabile;
- (5.3) se ne calcoli la derivata ove possibile;
- (5.4) si discuta dove la funzione è crescente e dove decrescente;
- (5.5) si trovi un intervallo $I \subset D_f$ in cui la funzione f sia iniettiva.

FACOLTATIVO: fissato I come al punto (5.5) si trovi $J \subset \mathbb{R}$ tale che $f : I \rightarrow J$ sia suriettiva.

ESERCIZIO 6. [3] Data la funzione

$$f(x) = |x - 1| - x - 1,$$

- (6.1) si determini per quali x la funzione è positiva;
- (6.2) si determini per quali x la funzione è costante;
- (6.3) si determini per quali x la funzione è derivabile e si calcoli la derivata $f'(x)$ ove possibile.

**Ogni foglio consegnato deve contenere: nome, numero di matricola, firma.
Non è consentito l'uso di libri, quaderni, appunti, telefonini e calcolatrici grafiche.**

MAT1 - Matematica 1

PRIMA PROVA D'ESONERO - COMPITO B (12-11-2015)

ESERCIZIO 1. [4+2] Si determini il dominio di due delle seguenti funzioni:

$$f_1(x) = \sqrt{(1-x^2)(e^x-1)}, \quad f_2(x) = \frac{1+\cos x}{1-\cos x}, \quad f_3(x) = \sqrt{|x+2|-|x-2|}.$$

FACOLTATIVO: Si determini il dominio dell'altra funzione.

ESERCIZIO 2. [10] Si studi il grafico della funzione

$$f(x) = \ln\left(\frac{x+3}{x-1}\right).$$

In particolare (i) si determini il dominio D_f della funzione, (ii) si discuta dove la funzione f è crescente o decrescente, (iii) si discuta dove f è convessa o concava e (iv) si studi l'esistenza di eventuali asintoti.

ESERCIZIO 3. [4+2] Si calcolino le derivate prime delle seguenti funzioni:

$$f(x) = \frac{x(x^2+1)}{x^2-1}, \quad g(x) = \frac{x(x-2)}{\sqrt{x^2+x+1}}.$$

FACOLTATIVO: Si calcolino le derivate seconde delle due funzioni.

ESERCIZIO 4. [5+3] Si calcoli uno dei due seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1+x^2} - \sqrt{x+1}}{e^x - e^{x-x^2}}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin^2 x) - 1 + \cos(\sin x)}{3 \cos x - 2 - \cos(3x)}.$$

FACOLTATIVO: Si calcoli anche l'altro limite.

ESERCIZIO 5. [5+2] Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{1}{(x-3)(x-1)}.$$

- (5.1) Si determini il dominio D_f di f ;
- (5.2) si discuta dove f è continua e dove è derivabile;
- (5.3) se ne calcoli la derivata ove possibile;
- (5.4) si discuta dove la funzione è crescente e dove decrescente;
- (5.5) si trovi un intervallo $I \subset D_f$ in cui la funzione f sia iniettiva.

FACOLTATIVO: fissato I come al punto (5.5) si trovi $J \subset \mathbb{R}$ tale che $f : I \rightarrow J$ sia suriettiva.

ESERCIZIO 6. [3] Data la funzione

$$f(x) = x - 2 - |x - 2|,$$

- (6.1) si determini per quali x la funzione è positiva;
- (6.2) si determini per quali x la funzione è costante;
- (6.3) si determini per quali x la funzione è derivabile e si calcoli la derivata $f'(x)$ ove possibile.

**Ogni foglio consegnato deve contenere: nome, numero di matricola, firma.
Non è consentito l'uso di libri, quaderni, appunti, telefonini e calcolatrici grafiche.**