

FM410 Fisica Matematica 3

A.A. 2016/2017

Guido Gentile

1. Richiami di meccanica lagrangiana

Spazio delle traiettorie e spazio delle deformazioni. Lagrangiana. Funzionale d'azione. Equazioni di Eulero-Lagrange. Primo principio variazionale di Hamilton (principio di minima azione). Equivalenza tra equazione di Newton ed equazioni di Eulero-Lagrange. Problemi di esistenza e unicità per problemi con condizioni al contorno. Formalismo lagrangiano per sistemi vincolati: equivalenza tra equazione di Newton integrata dal principio di d'Alembert ed equazioni di Eulero-Lagrange per sistemi vincolati.

2. Simmetrie e costanti del moto

Gruppi a un parametro di diffeomorfismi. Trasformazioni di coordinate e loro sollevamenti. Campi vettoriali, momenti associati ai campi vettoriali e momenti coniugati. Teorema della scatola di flusso. Gruppi di simmetrie a un parametro: teorema di Noether. Prodotto di Lie di campi vettoriali. Commutatore di campi vettoriali e commutatore di gruppi a un parametro. Teorema: due gruppi a un parametro commutano se e solo se commutano i campi vettoriali associati. Teorema di Frobenius. Gruppi di simmetrie a più parametri: teorema di Noether nel caso di gruppi di simmetrie a più parametri. Sistemi invarianti per traslazioni e sistemi invarianti per rotazioni.

3. Meccanica hamiltoniana

Spazio delle fasi. Trasformata di Legendre. Hamiltoniana ed equazioni di Hamilton. Secondo principio variazionale di Hamilton. Campo vettoriale hamiltoniano. Campi a divergenza nulla. Richiami sul teorema di Liouville e sul teorema del ritorno di Poincaré.

4. Trasformazioni canoniche

Trasformazioni di coordinate nello spazio delle fasi. Matrici simplettiche. Determinante delle matrici simplettiche. Trasformazioni che conservano la struttura canonica. Trasformazioni canoniche e trasformazioni simplettiche. Trasformazioni indipendenti e dipendenti dal tempo. Parentesi di Poisson e loro proprietà: bilinearità antisimmetricità e identità di Jacobi. Parentesi di Poisson fondamentali e integrali primi. Caratterizzazione delle trasformazioni canoniche in termini delle parentesi di Poisson. Richiami sulle forme differenziali e sul teorema di Stokes. Matrici antisimmetriche non singolari e direzione di rotore. Invariante integrale di Poincaré. Differenziale a tempo bloccato. Condizione di Lie.

5. Funzioni generatrici e metodo di Hamilton-Jacobi

Funzioni generatrici indipendenti e dipendenti dal tempo. Funzioni generatrici di prima e seconda specie. Funzione generatrice dell'identità. Estensione di un cambiamento di coordinate a una trasformazione simplettica nello spazio delle fasi. Equazione di Hamilton-Jacobi. Integrale generale e integrale completo. Funzione principale di Hamilton. Funzione caratteristica di Hamilton. Sistemi unidimensionali e problemi di non località. Sistemi separabili.

6. Variabili azione-angolo

Variabili azione-angolo. Sistemi unidimensionali. Sistemi a più dimensioni: teorema di Liouville-Arnold. Caso dei sistemi separabili. Dimostrazione del teorema di Liouville-Arnold per sistemi separabili. Variabili azione-angolo per l'oscillatore armonico. Variabili d'azioni per l'oscillatore quartico. Sistemi integrabili. Integrabilità del problema dei due corpi.

7. Teoria delle perturbazioni

Tori invarianti. Vettori diofantei. Sistemi quasi-integrabili. Equazione di Hamilton-Jacobi e serie perturbative. Teoria perturbativa al primo ordine ed equazione omologica. Problemi di convergenza delle serie in dimensione qualsiasi. Teoria perturbativa al primo ordine per sistemi anisocroni. Teorema di Nekhorošev per sistemi isocroni. Serie di Birkhoff. Controesempi alla convergenza delle serie di Birkhoff. Primo e secondo teorema di trivialità di Poincaré.

8. Teorema KAM

Enunciato del teorema nel caso di hamiltoniane analitiche. Condizione di Kolmogorov. Primo passo della dimostrazione del teorema KAM: definizione della trasformazione canonica, stime della nuova hamiltoniana, blocco della frequenza, definizione del nuovo dominio di analiticità. Passo generale della dimostrazione del teorema KAM: procedimento iterativo e costruzione del toro invariante. Considerazioni generali: proprietà generali ed estensioni.

TESTI CONSIGLIATI

- [1] G. GENTILE, *Introduzione ai sistemi dinamici. 2. Meccanica lagrangiana e hamiltoniana*. Disponibile in rete: <http://www.mat.uniroma3.it/users/gentile/2016-2017/FM410/testo.html>, (2016).

BIBLIOGRAFIA SUPPLEMENTARE

- [2] V.I. ARNOL'D, *Metodi Matematici della Meccanica Classica*. Editori Riuniti, (1979).
 [3] G. DELL'ANTONIO, *Elementi di Meccanica*. Liguori Editore, (1996).
 [4] A. FASANO & S. MARMI, *Meccanica analitica*. Bollati Boringhieri, (1994).
 [5] G. GALLAVOTTI, *Meccanica Elementare*. Bollati-Boringhieri, (1980).
 [6] L.D. LANDAU & E.M. LIFSHITZ, *Meccanica*. Editori Riuniti, (1976).

MODALITÀ D'ESAME

- valutazione in itinere (“esoneri”)		<input type="checkbox"/> SI	<input checked="" type="checkbox"/> NO
- esame finale	scritto	<input type="checkbox"/> SI	<input checked="" type="checkbox"/> NO
	orale	<input checked="" type="checkbox"/> SI	<input type="checkbox"/> NO
- altre prove di valutazione del profitto (meglio descritte sotto)		<input type="checkbox"/> SI	<input checked="" type="checkbox"/> NO