

**MAT1 - Matematica 1**

PROVA D'ESAME - TERZO APPELLO (14-4-2015)

ESERCIZIO 1. [4+2] Si calcoli il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1+x-x^2}}{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}.$$

FACOLTATIVO: si calcoli il limite con un metodo diverso da quello usato precedentemente.

ESERCIZIO 2. [10] Si studi il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{x^4}{4} - x^2 + \ln(1+x^2).$$

In particolare si determini il dominio della funzione, si discuta dove la funzione è crescente o decrescente, convessa o concava e si studi l'esistenza di eventuali asintoti.

ESERCIZIO 3. [5+2] Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix},$$

(3.1) si calcoli il determinante di  $A$ ;

(3.2) si discuta se esista la trasposta di  $A$  e in caso affermativo la si calcoli;

(3.3) si discuta se esista l'inversa di  $A$  e in caso affermativo la si calcoli;

(3.4) si determinino gli autovalori di  $A$ ;

(3.5) si determinino gli autovalori di  $A^2$ .

FACOLTATIVO: si determinino gli autovettori della matrice  $A$ .

ESERCIZIO 4. [4+1] Dati i due vettori nello spazio  $\vec{v} = (1, 3, 2)$  e  $\vec{w} = (4, 0, 1)$ ,

(4.1) si determi il vettore  $\vec{a} = 5\vec{v} - 2\vec{w}$ ;

(4.2) si calcoli il prodotto scalare  $\vec{v} \cdot \vec{w}$ ;

(4.3) si determini l'angolo  $\varphi$  compreso tra i vettori  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$ ;

(4.4) si calcoli il prodotto vettoriale  $\vec{v} \wedge \vec{w}$ .

FACOLTATIVO: si mostri che  $\vec{a} \wedge \vec{v} + \vec{a} \wedge \vec{w} = 7\vec{v} \wedge \vec{w}$ .

ESERCIZIO 5. [5] Si calcoli l'integrale definito

$$\int_0^{\pi/2} \sin x \cos x e^{\sin x} dx.$$

ESERCIZIO 6. [3+2] Si consideri la funzione

$$f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}.$$

(6.1) Se ne trovi il dominio  $D_f$ .

(6.2) Si mostri che la funzione  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  non è suriettiva.

(6.3) Si mostri che la funzione  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  è iniettiva.

FACOLTATIVO: si trovi un sottoinsieme  $J$  di  $\mathbb{R}$  tale che  $f : D \rightarrow J$  sia suriettiva.

**Ogni foglio consegnato deve contenere: nome, numero di matricola, firma.  
Non è consentito l'uso di libri, quaderni, appunti, telefonini e calcolatrici grafiche.**