

MAT1 - Matematica 1

PROVA D'ESAME - SESTO APPELLO (02-09-2016)

ESERCIZIO 1. [5+2] Si calcoli il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2) - \ln(x+e^{-x})}{(1+x^2)^2 - (1-x^2)^2}.$$

FACOLTATIVO: si calcoli il limite usando un metodo differente da quello usato precedentemente.

ESERCIZIO 2. [9] Si studi il grafico della funzione

$$f(x) = \left(\frac{x+2}{x-3} \right)^2.$$

In particolare (i) si determini il dominio della funzione, (ii) si discuta dove la funzione è crescente o decrescente, (iii) si discuta dove è convessa o concava e (iv) si studi l'esistenza di eventuali asintoti.

ESERCIZIO 3. [4] Nel piano xy sia r la retta di equazione $2y+x-6=0$ e P il punto di coordinate $P=(3,3)$.

(3.1) Si determinino un vettore \vec{v} parallelo alla retta r e un vettore \vec{w} ortogonale a \vec{v} ;

(3.2) si determini la retta s ortogonale a r e passante per il punto P ;

(3.3) si calcolino le coordinate del punto d'intersezione Q tra le due rette r e s ;

(3.4) si calcoli la distanza del punto P dalla retta r .

ESERCIZIO 4. [4+2] Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

(4.1) si calcolino gli autovalori di A ;

(4.2) si calcolino gli autovettori di A ;

(4.3) si calcoli A^2 ;

(4.3) si calcolino gli autovalori e gli autovettori di A^5 .

FACOLTATIVO: si verifichi che gli autovettori di A sono ortogonali.

ESERCIZIO 5. [4] Si calcoli l'integrale definito

$$\int_0^1 \frac{3+6x+4x^2}{1+4x^2} dx.$$

ESERCIZIO 6. [4+2] Si consideri la funzione $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ data da

$$f(x) = 1 - \frac{1}{x} + x^5 + \sqrt{1+x^2} + \log x.$$

(6.1) si mostri che $f(x)$ è iniettiva;

(6.2) si mostri che $f(x)$ è suriettiva.

FACOLTATIVO: si discuta quanti zeri ha la funzione $f(x)$.

**Ogni foglio consegnato deve contenere: nome, numero di matricola, firma.
Non è consentito l'uso di libri, quaderni, appunti, telefonini e calcolatrici grafiche.**