

Matematica - Modulo I

PROVA D'ESONERO (16-01-2017)

ESERCIZIO 1. [4+2] Si calcoli il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x+x^2} - e^{x-x^2}}{(1+x^2)^2 - (1-x^2)^2}.$$

FACOLTATIVO - Si usi un metodo diverso per calcolare lo stesso limite.

ESERCIZIO 2. [10] Si studi il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{1 + 3x^2 - x}{x + 2}.$$

In particolare: (i) se ne determini il dominio D_f ; (ii) si discuta dove la funzione è crescente o decrescente; (iii) si discuta dove è convessa o concava; (iv) si studi l'esistenza di eventuali asintoti; (v) si disegni il grafico.

ESERCIZIO 3. [4+2] Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

(3.1) si calcoli $\det A$;

(3.2) si calcolino gli autovalori di A ;

(3.4) si calcolino gli autovettori di A .

FACOLTATIVO - Si determinino autovalori e autovettori di A^3 .

ESERCIZIO 4. [4+2] Dati i due vettori nello spazio $\vec{v} = (1, 5, 2)$ e $\vec{w} = (0, 2, 1)$,

(4.1) si determi il vettore $\vec{a} = 2\vec{v} - 5\vec{w}$;

(4.2) si calcoli il prodotto scalare $\vec{v} \cdot \vec{w}$;

(4.3) si determini l'angolo φ compreso tra i due vettori \vec{v} e \vec{w} ;

(4.4) si calcoli il prodotto vettoriale $\vec{v} \wedge \vec{w}$ e si dimostri che $\vec{a} \wedge \vec{v} = 5\vec{v} \wedge \vec{w}$.

FACOLTATIVO - Si discuta se siano linearmente dipendenti i seguenti vettori: (i) \vec{v} e \vec{w} ; (ii) \vec{v} , \vec{w} e \vec{a} .

ESERCIZIO 5. [5] Si calcoli l'integrale definito

$$\int_0^3 \frac{\ln \sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}} dx.$$

ESERCIZIO 6. [3+2] Data la funzione

$$f(x) = |x^2 - 1| - x^2 + 1,$$

(6.1) si determini per quali x la funzione è positiva;

(6.2) si determini per quali x la funzione è costante;

(6.3) si determini per quali x la funzione è derivabile e si calcoli la derivata $f'(x)$ ove possibile.

FACOLTATIVO - Si calcolino massimo e minimo di $f(x)$.

**Ogni foglio consegnato deve contenere: nome, numero di matricola, firma.
Non è consentito l'uso di libri, quaderni, appunti, telefonini e calcolatrici grafiche.**