# FM410 Fisica Matematica 3
## A.A. 2017/2018

**Guido Gentile**

### 1. Richiami di meccanica lagrangiana

Sistemi meccanici conservativi. Sistemi vincolati e superficie di vincolo. Principio di d'Alembert. Spazio delle traiettorie e spazio delle deformazioni. Lagrangiana e funzionale d'azione. Equazioni di Eulero-Lagrange. Primo principio variazionale di Hamilton. Equazioni di Newton ed equazioni di Eulero-Lagrange per sistemi meccanici conservativi. Lagrangiana per sistemi vincolati. Equazioni di Newton integrate dal principio di d'Alembert ed equazioni di Eulero-Lagrange per sistemi meccanici conservativi vincolati. Formalismo lagrangiano per sistemi definiti su varietà differenziabili. Equazioni del moto per il pendolo semplice, nel formalismo lagrangiano e mediante l'uso dei moltiplicatori di Lagrange, e calcolo delle reazioni vincolari. Variabili cicliche e metodo di Routh. Applicazione al problema dei due corpi. Sistemi rigidi, teorema di König, operatore d'inerzia, momenti d'inerzia, momenti principali d'inerzia, assi d'inerzia.

### 2. Simmetrie e costanti del moto

Gruppi a un parametro di diffeomorfismi. Trasformazioni di coordinate e loro sollevamenti. Campi vettoriali, momenti associati ai campi vettoriali e momenti coniugati. Teorema della scatola di flusso. Gruppi di simmetrie a un parametro: teorema di Noether. Prodotto di Lie di campi vettoriali. Commutatore di campi vettoriali e commutatore di gruppi a un parametro. Teorema: due gruppi a un parametro commutano se solo se commutano i campi vettoriali associati. Teorema di Frobenius. Gruppi di simmetrie a più parametri: teorema di Noether nel caso di gruppi di simmetrie a più parametri. Sistemi invarianti per traslazione e sistemi invarianti per rotazione.

### 3. Meccanica hamiltoniana

Spazio delle fasi. Trasformata di Legendre. Hamiltoniana ed equazioni di Hamilton. Metodo di Routh nel formalismo hamiltoniano. Secondo principio variazionale di Hamilton. Campo vettoriale hamiltoniano. Campi a divergenza nulla. Teorema di Liouville. Teorema del ritorno di Poincaré. Esperimento di Maxwell.

### 4. Trasformazioni canoniche

Trasformazioni di coordinate nello spazio delle fasi. Matrici simplettiche. Determinante delle matrici simplettiche. Trasformazioni che conservano la struttura canonica. Trasformazioni canoniche e trasformazioni simplettiche. Trasformazioni indipendenti e dipendenti dal tempo. Le trasformazioni canoniche conservano la struttura canonica delle equazioni. Una trasformazione indipendente dal tempo è simplettica se e solo se conserva la struttura canonica delle equazioni con la stessa hamiltoniana. Parentesi di Poisson e loro proprietà. Parentesi di Poisson fondamentali. Integrali primi. Caratterizzazione delle trasformazioni canoniche in termini delle parentesi di Poisson. Richiami sulle forme differenziali, sul teorema della divergenza e sul teorema di Stokes. Estensione della nozione di rotore in dimensione più alta. Matrici antisimmetriche non singolari e forme differenziali non singolari. Spazio delle fasi esteso, direzione di rotore, linee di rotore e tubo di rotore. Matrici antisimmetriche non singolari e direzione di rotore. Invariante integrale di Poincaré-Cartan e invariante integrale relativo di Poincaré-Cartan. Differenziale a tempo bloccato. Condizione di Lie. Conservazione dell'invariante integrale (relativo o no) di Poincaré-Cartan.

**5. Funzioni generatrici e metodo di Hamilton-Jacobi**

Funzioni generatrici indipendenti e dipendenti dal tempo. Funzioni generatrici di prima e seconda specie. Funzione generatrice dell'identità. Estensione di un cambiamento di coordinate a una trasformazione simplettica nello spazio delle fasi. Il flusso hamiltoniano definisce una trasformazione canonica. Rivisitazione del teorema di Liouville. Equazione di Hamilton-Jacobi. Integrale generale e integrale completo. Funzione principale di Hamilton. Funzione caratteristica di Hamilton. Sistemi unidimensionali e problemi di non località. Sistemi separabili.

**6. Variabili azione-angolo**

Variabili azione-angolo. Sistemi a più dimensioni: teorema di Liouville-Arnold. Caso dei sistemi separabili. Dimostrazione del teorema di Liouville-Arnold per sistemi separabili. Variabli azione-angolo per l'oscillatore armonico. Variabili d'azioni per l'oscillatore quartico. Sistemi integrabili. Integrabilità del problema dei due corpi. Variabili azione-angolo per il problema dei due corpi.

**7. Teoria delle perturbazioni**

Tori invarianti. Vettori diofantei. Sistemi quasi-integrabili. Equazione di Hamilton-Jacobi e serie perturbative. Teoria perturbativa al primo ordine ed equazione omologica. Problemi di convergenza delle serie in dimensione qualsiasi. Sistemi isocroni. Condizione di anisocronia (o condizione di non degenerazione di Kolmogorov) e sistemi anisocroni. Teoria perturbativa al primo ordine per sistemi anisocroni. Teoria perturbativa a tutti gli ordini per sistemi isocroni. Teorema di Nekhoroševper sistemi isocroni. Serie di Birkhoff. Controesempi alla convergenza delle serie di Birkhoff. Primo e secondo teorema di trivialità di Poincaré per sistemi anisocroni.

### 8. Teorema KAM

Enunciato del teorema nel caso di hamiltoniane analitiche. Primo passo della dimostrazione del teorema KAM: definizione della trasformazione canonica, stime della nuova hamiltoniana, blocco della fequenza, definizione del nuovo dominio di analiticità. Passo generale della dimostrazione del teorema KAM: procedimento iterativo e costruzione del toro invariante. Considerazioni generali: proprietà generali ed estensioni.

# Testi consigliati


[1] G. Gentile, Introduzione ai sistemi dinamici. 2. Meccanica lagrangiana e hamiltoniana. Disponibile in rete: http://www.mat.uniroma3.it/users/gentile/2017-2018/FM410/testo.html, (2016).


# Bibliografia supplementare


[2] V.I. Arnol'd, *Metodi Matematici della Meccanica Classica*. Editori Riuniti, (1979).

[3] G. Dell'Antonio, *Elementi di Meccanica*. Liguori Editore, (1996).

[4] A. Fasano & S. Marmi, *Meccanica analitica*. Bollati Boringhieri, (1994).

[5] G. Gallavotti, *Meccanica Elementare*. Bollati-Boringhieri, (1980).

[6] L.D. Landau & E.M. Lifshitz, *Meccanica*. Editori Riuniti, (1976).


# Modalità d'esame

| | | | |
|---|---|---|---|
| - valutazione in itinere ("esoneri") | | ☐ SI | ■ NO |
| - esame finale | scritto | ☐ SI | ■ NO |
| | orale | ■ SI | ☐ NO |
| - altre prove di valutazione del profitto (meglio descritte sotto) | | ☐ SI | ■ NO |