Quindi le due equazioni si disaccoppiano e ciascuna di esse descrive un sistema unidimensionale. In termini della variabile $z := z_1 + mg/2k$, la seconda equazione diventa $m\ddot{z} = -2kz$, che descrive un oscillatore armonico di frequenza $\tilde{\omega} := \sqrt{2k/m}$, che può essere discusso come nel §7.2. La prima equazione descrive invece un pendolo di lunghezza $\ell := gm/2k$ (cfr. la (24.1)), il cui moto può essere discusso come nel §24. Infine, nel caso del punto (6), il moto avviene nel piano $xz$, che ruota intorno all'asse $z$ con velocità angolare costante $\omega$. I punti $P_0$ e $P_2$ sono fissi nelle configurazioni $P_1 = (1,1)$ e $P_2 = (1,-1)$, mentre il punto $P_1 = (x_1, z_1)$ è libero di muoversi nel piano. La lagrangiana del sistema è data da $\mathcal{L} = T - V$, con

$$T = \frac{1}{2}m\big(\dot{x}_1^2 + \dot{z}_1^2\big), \qquad V = mgz_1 + \frac{1}{2}k\big((x_1-1)^2 + (z_1-1)^2 + (x_1-1)^2 + (z_1+1)^2\big) - \frac{1}{2}m\omega^2 x_1^2,$$

dove l'ultimo termine rappresenta il contributo dovuto alla forza centrifuga (cfr. l'esercizio 7). Il sistema si disaccoppia nuovamente in due sistemi unidimensionali, i quali sono ora descritti dalla lagrangiane

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 &= T_1 - V_1, \qquad T_1 = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2, \qquad V_1 = k\big(x_1^2 - 2x_1\big) - \frac{1}{2}m\omega^2 x_1^2, \\ \mathcal{L}_2 &= T_2 - V_2, \qquad T_2 = \frac{1}{2}m\dot{z}_1^2, \qquad V_2 = kz_1^2 + mgz_1, \end{aligned}$$

da cui si ricavano le equazioni di Eulero-Lagrange

$$m\ddot{x}_1 = -\big(2k - m\omega^2\big)x_1 + 2k, \qquad m\ddot{z}_1 = -mg - 2kz_1.$$

Se $2k \neq m\omega^2$, si ha l'unica configurazione di equilibrio $(x_1, z_1) = (x_0, z_0)$, con $x_0 := 2k/(2k - m\omega^2)$ e $z_0$ definito come nel caso precedente; poiché la derivata seconda di $V_1$ vale $2k - m\omega^2$, tale configurazione di equilibrio è stabile se $2k > m\omega^2$ e instabile se $2k < m\omega^2$. Se, al contrario, si ha $2k = m\omega^2$, non si hanno configurazioni di equilibrio, dal momento che, tenuto conto che $k > 0$, il campo vettoriale è sempre diverso da zero in tal caso.]

**Esercizio 42** Un sistema meccanico è costituito da 2 dischi omogenei di massa $m$ e raggio $r = \sqrt{2}$, vincolati a rotolare senza strisciare in un piano verticale, il primo lungo la retta $y = x$ e il secondo lungo la retta $y = -x$. I centri $C_1$ e $C_2$ dei due dischi sono collegati tra loro da una molla di costante elastica $k$ e lunghezza a riposo nulla. Inoltre i due dischi sono sottoposti alla forza di gravità; sia $g$ l'accelerazione di gravità.
(1) Si scriva la lagrangiana del sistema, usando come coordinate lagrangiane le ascisse $x_1$ e $x_2$ dei punti di contatto $P_1$ e $P_2$ dei due dischi con le rispettive guide. [Si ricorda che il momento principale d'inerzia di un disco di massa $m$ e raggio $r$ intorno al proprio asse di rotazione è $I_3 = mr^2/2$.]
(2) Si scrivano le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange.
(3) Si determinino le configurazioni di equilibrio in funzione dei parametri positivi $m$, $g$ e $k$.
(4) Se ne discuta la stabilità al variare dei parametri.
(5) Si determinino le configurazioni di equilibrio relativo se il piano ruota intorno all'asse $y$ con velocità angolare costante $\omega$ e se ne discuta la stabilità al variare dei parametri $m$, $g$, $k$ e $\omega$.
(6) Si supponga ora che il primo disco sia fissato lungo la guida in modo tale che il suo centro $C_1$ si trovi sull'asse $y$; in tal caso si può utilizzare come coordinata lagrangiana la sola variabile $x_2$. Si calcolino le nuove configurazioni di equilibrio relativo e se ne discuta la stabilità, sempre nel caso in cui il piano ruoti intorno all'asse verticale con velocità angolare costante $\omega$. In particolare si studi qualitativamente il moto del sistema unidimensionale corrispondente.

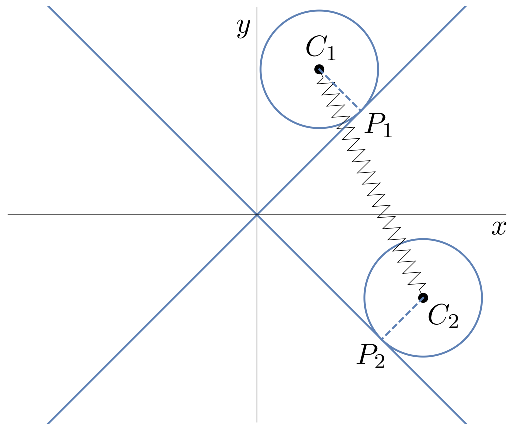


Figura 12.26: Sistema discusso nell'esercizio 42.

[*Suggerimento.* Le coordinate dei punti $P_1$ e $P_2$ sono $P_1 = (x_1, x_1)$ e $P_2 = (x_2, x_2)$. Il centro $C_1$ del disco che scorre sulla guida $y = x$ si trova sulla retta passante per $P_1$ ortogonale alla guida: tale retta forma un angolo $\pi+\pi/4$ con l'asse $x$, quindi le coordinate di $C_1$ sono $C_1 = (x_1+\sqrt{2}\cos(3\pi/4), x_1+\sqrt{2}\sin(3\pi/4) = (x_1 - 1, x_1 + 1)$; analogamente il centro $C_2$ del disco che scorre sulla guida $y = -x$ si trova sulla retta passante per $P_2$ ortogonale alla guida, che forma un angolo $\pi/4$ con l'asse $x$, così che le coordinate di $C_2$ sono $C_2 = (x_2 + \sqrt{2}\cos(\pi/4), -x_2 + \sqrt{2}\sin(\pi/4) = (x_2 + 1, -x_2 + 1)$. Poiché i dischi rotolano senza strisciare, si ha $|v_1| = r|\dot\theta_1|$, dove $v_1 = (\dot x_1, \dot x_1)$ è la velocità di $C_1$ e $\dot\theta_1$ è la velocità con cui il disco di centro $C_1$ ruota intorno al proprio asse; ne segue che $\sqrt{2}|\dot x_1| = \sqrt{2}|\dot\theta_1|$, da cui si ricava, tenendo condo che $\dot x_1$ e $\dot\theta_1$ hanno segno concorde, $\dot x_1 = \dot\theta_1$. Ragionando in modo analogo per l'altro disco, si trova $\dot x_2 = \dot\theta_2$, dove $\dot\theta_2$ indica la velocità con cui il disco di centro $C_2$ ruota intorno al proprio asse. Per il teorma di König l'energia cinetica dei due dischi è data da

$$T = T_1 + T_2, \qquad T_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}I_3\theta_1^2 = \frac{3}{2}m\dot x_1^2, \quad T_2 = \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}I_3\theta_2^2 = \frac{3}{2}m\dot x_2^2,$$

dove $v_2 = (\dot x_2, \dot x_2)$ indica la velocità di $C_2$. L'energia potenziale è data da

$$V = V_{\rm gr} + V_{\rm el}, \qquad V_{\rm gr} = mgx_1 - mgx_2, \quad V_{\rm el} = \frac{1}{2}k\left((x_1 - 1 - x_2 - 1)^2 + (x_1 + 1 + x_2 - 1)^2\right),$$

dove $V_{\rm gr}$ e $V_{\rm el}$ sono rispettivamente l'energia potenziale gravitazionale e l'energia potenziale elastica dovuta alla molla. Semplificando l'espressione per $V_{\rm el}$ e trascurando i termini costanti, si trova

$$V = V_1 + V_2, \qquad V_1 = V_1(x_1) = k\,x_1^2 - 2kx_1 + mgx_1, \quad V_2 = V_2(x_2) = k\,x_2^2 + 2kx_2 - mgx_2.$$

In conclusione la lagrangiana è data da

$$\mathcal{L} = T - V, \qquad T = \frac{3}{2}m\left(\dot x_1^2 + \dot x_2^2\right), \quad V = k\,x_1^2 - 2kx_1 + mgx_1 + k\,x_2^2 + 2kx_2 - mgx_2$$

e le equazioni di Eulero-Lagrange sono

$$3m\ddot x_1 = -2kx_1 + 2k - mg, \qquad 3m\ddot x_2 = -2kx_2 - 2k + mg.$$

Le configurazioni di equilibrio corrispondono ai valori $(x_1, x_2)$ tali che

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = 2kx_1 - 2k + mg = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial x_2} = 2kx_2 + 2k - mg = 0.$$

Si ha pertanto un'unica configurazione di equilibrio:

$$(Q) \qquad x_1 = -\frac{mg}{2k} + 1, \qquad x_2 = \frac{mg}{2k} - 1.$$

Per studiarne la stabilità si calcola la matrice hessiana:

$$\mathcal{H}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2k & 0 \\ 0 & 2k \end{pmatrix},$$

che ha determinante $4k^2 > 0$; poiché il primo elemento $2k$ è positivo, $Q$ costituisce un punto di minimo per l'energia potenziale e quindi una configurazione di equilibrio stabile per il sistema lagrangiano. Se il piano ruota intorno all'asse $y$, nel sistema di riferimento solidale con il piano rotante all'energia potenziale occorre aggiungere due ulteriori termini, dovuti alle forze centrifughe che agiscono sui due dischi. Per il primo disco si ha (cfr. gli esercizi 7 e 23)

$$V_{\text{cf},1} = -\frac{1}{2}\omega^2 \int_{D_1} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\rho(x,y)\,x^2 = -\frac{1}{2}\frac{m}{\pi r^2}\omega^2 \int_0^r r'\mathrm{d}r' \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta\,(x_1 - 1 + r'\cos\theta)^2,$$

dove $\rho(x,y) = m/\pi r^2$ è la densità superficiale di massa del disco $D_1$ (il cui raggio vale $r = \sqrt{2}$), mentre $x_1 - 1 + r'\cos\theta$ è la coordinata $x$ del generico punto del disco. Svolgendo l'integrale, si trova

$$\begin{aligned}
\int_0^r r'\mathrm{d}r' \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta\,(x_1 - 1 + r'\cos\theta)^2 &= \int_0^r r'\mathrm{d}r' \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta\,\big((x_1-1)^2 + 2r'\cos\theta(x_1-1) + (r')^2\cos\theta^2\big) \\
&= \pi r^2\,(x_1-1)^2 + \text{cost.},
\end{aligned}$$

dove si è utilizzato che il secondo termine dà zero quando viene integrato su $\theta$ e l'ultimo dà una costante, che quindi si può ignorare. In conclusione, effettuando un conto analogo anche per il secondo disco, si trova

$$V_{\text{cf},1} = -\frac{1}{2}m\omega^2\,(x_1-1)^2, \qquad V_{\text{cf},2} = -\frac{1}{2}m\omega^2\,(x_2+1)^2$$

così che la lagrangiana è data dalla somma di due lagrangiane disaccoppiate, i.e. $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$, dove

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_1 &= T_1 - V_1, \qquad T_1 = \frac{3}{2}m\dot{x}_1^2, \quad V_1 = k\,x_1^2 - 2kx_1 + mgx_1 - \frac{1}{2}m\omega^2 x_1^2 + m\omega^2 x_1, \\
\mathcal{L}_2 &= T_2 - V_2, \qquad T_2 = \frac{3}{2}m\dot{x}_2^2, \quad V_2 = k\,x_2^2 + 2kx_2 - mgx_2 - \frac{1}{2}m\omega^2 x_2^2 - m\omega^2 x_2, \qquad (61.21)
\end{aligned}$$

e le corrispondenti equazioni di Eulero -Lagrange sono

$$3m\ddot{x}_1 = -\left(2k - m\omega^2\right)x_1 + 2k - m\omega^2 - mg, \qquad 3m\ddot{x}_2 = -\left(2k - m\omega^2\right)x_2 - 2k + m\omega^2 + mg.$$

Di nuovo si ha un'unica configurazione di equilibrio, data da

$$(Q) \qquad x_1 = -\frac{mg}{2k - m\omega^2} + 1, \qquad x_2 = \frac{mg}{2k - m\omega^2} - 1.$$

se $2k \neq m\omega^2$, mentre se $2k = m\omega^2$ non si hanno configurazioni di equilibrio. La matrice hessiana dell'energia potenziale è

$$\mathcal{H}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2k - m\omega^2 & 0 \\ 0 & 2k - m\omega^2 \end{pmatrix},$$

che ha determinante positivo e primo elemento positivo se e solo se $2k > m\omega^2$. In conclusione la configurazione di equilibrio $Q$, quando esiste, è stabile se $2k > m\omega^2$ e instabile se $2k < m\omega^2$. Se infine si fissa il primo disco in modo che il suo centro $C_1 = (x_1 - 1, x_1 + 1)$ si trovi sull'asse $y$, si deve avere $x_1 - 1 = 0$, così che $C_1 = (0, 2)$. Imponendo tale vincolo, la lagrangiana diventa

$$\mathcal{L} = T - V, \qquad T = \frac{3}{2} m\dot{x}_2^2, \quad V = k\, x_2^2 + 2kx_2 - mgx_2 - \frac{1}{2} m\omega^2 x_2^2 - m\omega^2 x_2,$$

e le equazioni di Eulero -Lagrange si riducono all'unica equazione

$$3m\ddot{x}_2 = -\left(2k - m\omega^2\right) x_2 - 2k + m\omega^2 + mg.$$

Se $2k = m\omega^2$, l'equazione diventa $3m\ddot{x}_2 = mg$, che descrive un moto uniformemente accelerato: le soluzioni sono della forma

$$x_2(0) = x(0) + \dot{x}(0)\, t + \frac{g}{6} t^2.$$

Se invece $2k \neq m\omega^2$, definendo

$$x := x_2 - 1 + \frac{mg}{2k - m\omega^2}, \qquad \kappa := \frac{2k - m\omega^2}{3m},$$

si ottiene l'equazione $\ddot{x} = -\kappa x$, che, se $\kappa > 0$ (i.e. $2k > m\omega^2$), descrive un oscillatore armonico di frequenza $\omega = \sqrt{\kappa}$, che può essere discusso come nel §7.2, mentre, se $\kappa < 0$ (i.e. $2k < m\omega^2$), descrive un sistema planare in cui l'origine è un punto di sella (cfr. il §7.1), dal momento che gli autovalori del sistema sono $\pm\sqrt{-\kappa}$.]

**Esercizio 94** Alla luce dell'esercizio 64, si dimostri che le funzioni generatrici di prima, seconda, terza e quarta specie della trasformazione di coordinate dell'esercizio 91, trovate negli esercizi 91÷93, sono legate tra loro attraverso una trasformata di Legendre.

**Esercizio 95** Si dimostri che è canonica la seguente trasformazione di coordinate

$$\begin{cases} Q = \operatorname{arctg} q, \\ P = p + q^2 + pq^2, \end{cases}$$

e si trovi una funzione generatrice di seconda specie. [*Suggerimento.* Si ha $F(q,P) = (1+P)\operatorname{arctg} q - q$.]

**Esercizio 96** Si dimostri che la trasformazione di coordinate

$$\begin{cases} q_1 = Q_1 + \dfrac{P_1}{m}t, \qquad q_2 = Q_2 + \dfrac{P_2}{m}t, \qquad q_3 = Q_3 + \dfrac{P_3}{m}t - \dfrac{1}{2}gt^2, \\ p_1 = P_1, \qquad p_2 = P_2, \qquad p_3 = P_3 - gmt, \end{cases}$$

è canonica trovandone una funzione generatrice di seconda specie. Si mostri che l'hamiltoniana

$$\mathcal{H}(q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3) = \frac{1}{2m}\left(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2\right) + mgq_3$$

è trasformata nell'hamiltoniana $\mathcal{K} = 0$ (a meno di una funzione dipendente solo dal tempo $t$) e si interpreti tale risultato alla luce del teorema 77.11. [*Suggerimento.* Si trova

$$F(q_1, q_2, q_3, P_1, P_2, P_3) = q_1P_1 + q_2P_2 + q_3P_3 - \frac{1}{2m}\left(P_1^2 + P_2^2 + P_3^2\right)t + \frac{1}{2}gt^2P_3 - gmtq_3.$$

La trasformazione canonica rappresenta il flusso hamiltoniano di un punto materiale di massa $m$ sottoposto alla forza di gravità.]

**Esercizio 97** Si consideri la trasformazione di coordinate

$$\begin{cases} Q = 2\sqrt{q(p - \log q - 1)}\,\log q, \\ P = \sqrt{q(p - \log q - 1)}. \end{cases}$$

(1) Si determini il dominio della trasformazione e se ne calcoli l'inversa.
(2) Si dimostri che la trasformazione è canonica verificando esplicitamente che le parentesi di Poisson fondamentali sono conservate.
(3) Si consideri il sistema hamiltoniano descritto dall'hamiltoniana $H(q,p) = (qp - q\log q - q)^2$ nel sistema di coordinate $(q,p)$: si determini l'hamiltoniana nel sistema di coordinate $(Q,P)$.
(4) Si trovi la soluzione $(q(t), p(t))$ con dati iniziali $(q(0), p(0)) = (1, 2)$.
(5) Si trovi una funzione generatrice di seconda specie $F_2(q,P)$ della trasformazione data.
(6) Si trovi, se possibile, una funzione generatrice di prima specie $F_1(q,Q)$.
[*Soluzione.* La trasformazione è definita per $q > 0$ e $p - 1 - \log q \geq 0$; quindi il suo dominio è dato da $D := \{(q,p) \in \mathbb{R}^2 : q > 0, p \geq 1 + \log q\}$. Per calcolare l'inversa, si procede come segue: dividendo le prima equazione per la seconda, si trova $Q/P = 2\log q$, da cui si ottiene $q = \mathrm{e}^{Q/2P}$; il quadrato della seconda equazione dà $P^2 = q(p - \log q - 1)$, da cui si ottiene

$$p = \frac{P^2}{q} + \log q + 1 \quad \Longrightarrow \quad p = P^2\mathrm{e}^{-Q/2P} + \frac{Q}{2P} + 1,$$

così che la trasformazione inversa è data da

$$\begin{cases} q = \mathrm{e}^{Q/2P}, \\ p = P^2 \mathrm{e}^{-Q/2P} + \dfrac{Q}{2P} + 1. \end{cases}$$

definita nel dominio $P > 0$. Si verifica esplicitamente che $\{Q, P\} = 1$; infatti, ponendo per semplicità notazionale $A := \sqrt{q(p - \log q - 1)}$, si trova

$$\frac{\partial Q}{\partial q} = \frac{2A}{q} + \frac{(A^2-1)\log q}{A}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial p} = \frac{q \log q}{A}, \qquad \frac{\partial P}{\partial q} = \frac{(A^2-1)}{2A}, \qquad \frac{\partial P}{\partial p} = \frac{q}{2A},$$

da cui si ottiene

$$\frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} = 1 + \frac{(A^2-1) q \log q}{2A^2}, \quad \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q} = \frac{(A^2-1) q \log q}{2A^2} \implies \{Q, P\} = 1.$$

Poiché la trasformazione è canonica, l'hamiltonmiana nelle nuove coordinate $(Q, P)$ è data da $\hat{H}(Q, P) = P^4$. Le corrispondenti equazioni di Hamilton sono

$$\dot{Q} = 4P^3, \qquad \dot{P} = 0,$$

e si integrano immediatamente: si trova quindi $Q(t) = Q(0) + 4P^3(0)t$ e $P(t) = P(0)$, dove

$$Q(0) = 2\sqrt{q(0)\,(p(0) - \log q(0) - 1)}\,\log q(0) = 0, \qquad P(0) = \sqrt{q(0)\,(p(0) - \log q(0) - 1)} = 1.$$

così che, in corrispondenza dei dati iniziali scelti, si ha $Q(t) = 4t$ e $P(t) = 1$. In termini delle coordinate originali, si ha

$$q(t) = \mathrm{e}^{2t}, \qquad p(t) = \mathrm{e}^{-2t} + 2t + 1.$$

Per trovare una funzione generatrice di seconda specie $F_2(q, P)$, si parte dall'espressione di $p$ in termini di $q$ e $P$ ricavata precedentemente:

$$\frac{\partial F_2}{\partial q} = p = \frac{P^2}{q} + \log q + 1 \implies F_2(q, P) = P^2 \log q + (q \log q - q) + q + c(P) = \left(P^2 + q\right) \log q + c(P),$$

dove si è usato che

$$\int \mathrm{d}q\, \log q = q \log q - \int \mathrm{d}q\, q \frac{1}{q} = q \log q - \int \mathrm{d}q = q \log q - q + \text{cost}.$$

e si è indicata con $c(P)$ una funzione arbitraria di $P$. Derivando $F_2$ rispetto a $P$, si ha

$$\frac{\partial F_2}{\partial P} = 2P \log q + \frac{\partial c}{\partial P} = Q = 2P \log q,$$

dove si è utilizzata l'espressione precedente di $Q$ espressa in termini di $q$ e $P$. Si può quindi porre $c(P) = 0$, così da avere $F_2(q, P) = (P^2 + q) \log q$. Per trovare una funzione generatrice di prima specie $F_1(q, Q)$, si pone

$$p = \frac{\partial F_1}{\partial q}, \qquad P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q}.$$

Dalla prima equazione della trasformazione data si ricava

$$Q^2 = 4q(p - \log q - 1) \log^2 q \implies \frac{Q^2}{4q \log^2 q} = p - \log q - 1 \implies p = \frac{Q^2}{4q \log^2 q} + \log q + 1,$$

Utilizzando il fatto che

$$\int \mathrm{d}q\, \frac{1}{q \log^2 q} = -\frac{1}{\log q} + \text{cost.},$$

come si verifica immediatamente attraverso la sostituzione $t = \log q$, si trova

$$F_1(q, Q) = -\frac{Q^2}{4 \log q} + q \log q + c(Q),$$

dove $c(Q)$ è una funzione arbitraria della sola $Q$. Dividendo la prima equazione della trasformazione pert la seconda si trova

$$P = \frac{Q}{2 \log q} \implies -\frac{\partial F_1}{\partial Q} = P = \frac{Q}{2 \log q} + \frac{\partial c}{\partial Q} = \frac{Q}{2 \log q},$$

che consente di scegliere $c(Q) = 0$, così da ottenere $F_1(q, Q) = -Q^2/4 \log q + q \log q$.]

**Esercizio 98** Si consideri la trasformazione di coordinate

$$\begin{cases} Q = \dfrac{(1 - qp)^2}{q^2 p}, \\ P = \dfrac{q^2 p}{1 - qp}. \end{cases}$$

(1) Si dimostri che è canonica verificando che si conservano le parentesi di Poisson fondamentali.
(2) Si trovi una funzione generatrice di seconda specie $F(q, P)$.
(3) Si dimostri che $q^2 p = QP^2$.
(4) Si utilizzi (3) e l'espressione di $P$ in termini di $q$ e $p$ per esprimere $q$ in termini di $Q$ e $P$.
(5) Si calcoli la trasformazione inversa, esplicitando anche $p$ in funzione di $Q$ e $P$.
(6) Si consideri il sistema hamiltoniano descritto dall'hamiltoniana $H(q, p) = q^2 p \, (1 - qp)^{-1}$: si determini esplicitamente la soluzione con dati iniziali $(q(0), p(0)) = (1, 2)$.
[*Soluzione.* Per calcolo esplicito, si trova

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial q} &= -\frac{2p(1 - qp)}{q^2 p} - \frac{2(1 - qp)^2}{q^3 p}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial p} = -\frac{2q(1 - qp)}{q^2 p} - \frac{(1 - qp)^2}{q^2 p^2}, \\ \frac{\partial P}{\partial q} &= = \frac{2qp}{1 - qp} + \frac{q^2 p^2}{(1 - qp)^2}, \qquad \frac{\partial P}{\partial p} = \frac{q^2}{1 - qp} + \frac{q^3 p}{(1 - qp)^2}, \end{aligned}$$

così che si ha

$$\begin{aligned} \{Q, P\} &= \frac{\partial Q}{\partial q} \frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial P}{\partial q} \\ &= -\left( \frac{2p(1 - qp)}{q^2 p} + \frac{2(1 - qp)^2}{q^3 p} \right) \left( \frac{q^2}{1 - qp} + \frac{q^3 p}{(1 - qp)^2} \right) \\ &\quad + \left( \frac{2q(1 - qp)}{q^2 p} + \frac{(1 - qp)^2}{q^2 p^2} \right) \left( \frac{2qp}{1 - qp} + \frac{q^2 p^2}{(1 - qp)^2} \right) \\ &= -\left( 2 + \frac{2qp}{1 - qp} + \frac{2(1 - qp)}{qp} + 2 \right) + \left( 4 + \frac{2qp}{1 - qp} + \frac{2(1 - qp)}{qp} + 1 \right) = 1. \end{aligned}$$

Dalla seconda equazione si ottiene

$$P(1 - qp) = q^2 p \quad \implies \quad P = p \left( qP + q^2 \right) \quad \implies \quad p = \frac{P}{q(q + P)},$$