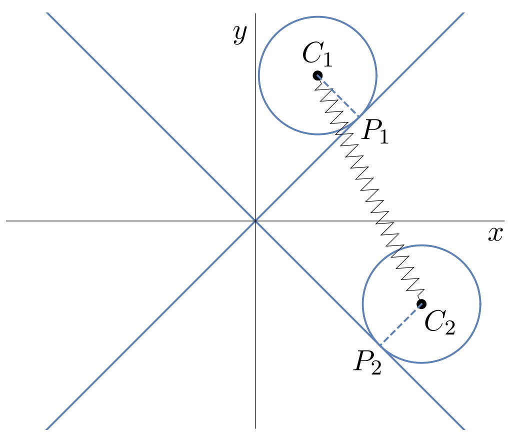
Corso di Laurea in Fisica - Corso di Laurea in Matematica
Anno Accademico 2018/2019

FM210 - Meccanica Analitica

Primo appello (25-06-2019)

Esercizio 1. [24] Un sistema meccanico è costituito da 2 dischi omogenei di massa m e raggio $r = \sqrt{2}$, vincolati a rotolare senza strisciare in un piano verticale, il primo lungo la retta $y = x$ e il secondo lungo la retta $y = -x$. I centri C_1 e C_2 dei due dischi sono collegati tra loro da una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla. Inoltre i due dischi sono sottoposti alla forza di gravità; sia g l'accelerazione di gravità.
(1.1) Si scriva la lagrangiana del sistema, usando come coordinate lagrangiane le ascisse x_1 e x_2 dei punti di contatto P_1 e P_2 dei due dischi con le rispettive guide. [Si ricorda che il momento principale d'inerzia di un disco di massa m e raggio r intorno al proprio asse di rotazione è $I_3 = mr^2/2$.]
(1.2) Si scrivano le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange.
(1.3) Si determinino le configurazioni di equilibrio in funzione dei parametri positivi m, g e k.
(1.4) Se ne discuta la stabilità al variare dei parametri.
(1.5) Si determinino le configurazioni di equilibrio relativo se il piano ruota intorno all'asse y con velocità angolare costante ω e se ne discuta la stabilità al variare dei parametri m, g, k e ω.
(1.6) Si supponga ora che il primo disco sia fissato lungo la guida in modo tale che il suo centro C_1 si trovi sull'asse y; in tal caso si può utilizzare come coordinata lagrangiana la sola variabile x_2. Si calcolino le nuove configurazioni di equilibrio relativo e se ne discuta la stabilità, sempre nel caso in cui il piano ruoti intorno all'asse verticale con velocità angolare costante ω. In particolare si studi qualitativamente il moto del sistema unidimensionale corrispondente.



Esercizio 2. [12] Si consideri la seguente trasformazione di coordinate:

$$\begin{cases} Q = 2\sqrt{q(p - \log q - 1)}\,\log q, \\ P = \sqrt{q(p - \log q - 1)}. \end{cases}$$

(2.1) Si determini il dominio della trasformazione e se ne calcoli l'inversa.
(2.2) Si dimostri che la trasformazione è canonica verificando esplicitamente che le parentesi di Poisson fondamentali sono conservate.
(2.3) Si consideri il sistema hamiltoniano descritto dall'hamiltoniana $H(q, p) = (qp - q\log q - q)^2$ nel sistema di coordinate (q, p): si determini l'hamiltoniana nel sistema di coordinate (Q, P).
(2.4) Si trovi la soluzione $(q(t), p(t))$ con dati iniziali $(q(0), p(0)) = (1, 2)$.
(2.5) Si trovi una funzione generatrice di seconda specie $F_2(q, P)$ della trasformazione data.
(2.6) Si trovi, se possibile, una funzione generatrice di prima specie $F_1(q, Q)$.

Ogni foglio consegnato deve contenere: nome, numero di matricola, firma.
Non è consentito l'uso di libri, quaderni, appunti, telefonini e calcolatrici grafiche.