Esercizio 41 Un sistema meccanico è costituito da 3 punti P_0, P_1 e P_2 di massa m vincolati a muoversi sulla superficie di un cilindro circolare retto di raggio $r = 1$. Si scelga un sistema di riferimento $Oxyz$, in cui l'asse z sia diretto lungo l'asse del cilindro: il punto P_0 è fisso e si trova a quota $z = 1$, il punto P_2 si muove lungo la circonferenza posta a quota $z = -1$, mentre il punto P_1 non ha ulteriori vincoli (cfr. la figura 12.25a). Due molle di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla collegano il punto P_1 ai due punti P_0 e P_2. I punti sono inoltre sottoposti alla forza di gravità, diretta verso il basso lungo l'asse z; sia g l'accelerazione di gravità.
(1) Si scriva la lagrangiana del sistema, usando come coordinate lagrangiane la coordinata z_1 di P_1 lungo l'asse z e gli angoli θ_1 e θ_2 che i punti P_1 e P_2 formano rispetto al punto P_0 (cfr. la figura 12.25a).
(2) Si scrivano le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange.
(3) Si determinino le configurazioni di equilibrio in funzione dei parametri positivi m, g e k.
(4) Se ne discuta la stabilià al variare dei parametri.
(5) Si verifichi che, se il punto P_2 viene fissato nella configurazione $\theta_2 = 0$, il sistema si disaccoppia in due sistemi unidimensionali e si discutano qualitativamente i due moti.
(6) Si supponga infine, sempre fissando il punto P_2 nella configurazione $\theta_2 = 0$, che il punto P_1 sia libero di muoversi nel piano che contiene l'asse z e i due punti P_0 e P_2 (cfr. la figura 12.25b), e che il cilindro ruoti intorno al proprio asse con velocità angolare costante ω: si determinino le configurazioni di equilibrio relativo del sistema nel piano rotante e se ne discuta la stabilità.

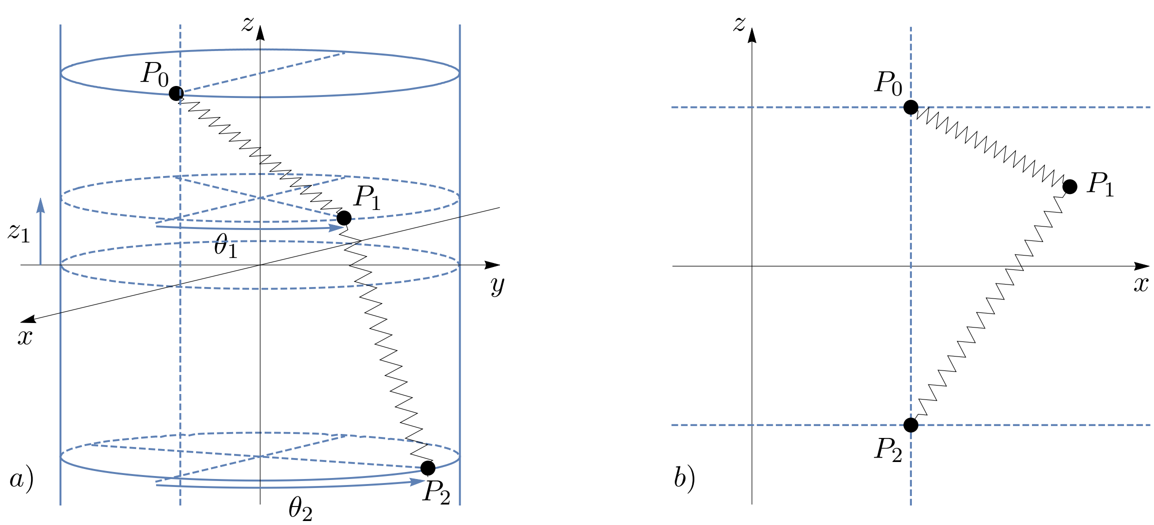

Figura 12.25: Sistema discusso nell'esercizio 41.

[*Suggerimento.* In termini delle coordinate suggerite, i tre punti hanno coordinate $P_0 = (1, 0, 1)$, $P_1 = (\cos\theta_1, \sin\theta_1, z_1)$ e $P_2 = (\cos\theta_2, \sin\theta_2, -1)$. La lagrangiana è $\mathcal{L} = T - V$, dove l'energia cinetica T e l'energia potenziale V sono, rispettivamente,

$$T = \frac{1}{2}m\big(\dot\theta_1^2 + \dot\theta_2^2 + \dot z_1^2\big), \qquad V = mgz_1 + k\big(z_1^2 - \cos\theta_1 - \cos(\theta_1 - \cos\theta_2)\big),$$

dove si è tenuto conto che l'energia elastica delle due molle è data da

$$U_{\rm el} = \frac{1}{2}k\left((1-\cos\theta_1)^2 + \sin^2\theta_1 + (z_1-1)^2 + (\cos\theta_2 - \cos\theta_1)^2 + (\sin\theta_2 - \sin\theta_1)^2 + (z_1+1)^2\right)$$

e si è utilizzata l'identità trigonometrica $\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2 = \cos(\theta_1-\theta_2)$. Le equazioni di Eulero-Lagrange sono

$$m\ddot\theta_1 = -k\sin\theta_1 - k\sin(\theta_1-\theta_2), \qquad m\ddot\theta_2 = k\sin(\theta_1-\theta_2), \qquad m\ddot z_1 = -mg - 2kz_1.$$

Le configurazioni di equilibrio corrispondono ai valori (θ_1,θ_2,z_1) tali che

$$\frac{\partial V}{\partial\theta_1} = k\big(\sin\theta_1 + \sin(\theta_1-\theta_2)\big) = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial\theta_2} = k\,\sin(\theta_1-\theta_2) = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial z_1} = mg + 2kz_1 = 0$$

Dalla differenza delle prime due equazioni si ricava $\sin\theta_1 = 0$, che implica $\theta_1 = 0$ oppure $\theta_1 = \pi$. Inserendo tali valori nella seconda equazione si trova

$$\begin{aligned} &\theta_1 = 0 \quad\Longrightarrow\quad \sin\theta_2 = 0 \quad\Longrightarrow\quad \theta_2 = 0 \text{ oppure } \theta_2 = \pi, \\ &\theta_1 = \pi \quad\Longrightarrow\quad \sin(\pi-\theta_2) = \sin\theta_2 = 0 \quad\Longrightarrow\quad \theta_2 = 0 \text{ oppure } \theta_2 = \pi, \end{aligned}$$

mentre dalla terza equazione si ottiene direttamente $z = z_0$, dove $z_0 := -mg/2k$. In conclusione, si hanno le quattro configurazioni di equilibrio

$$\begin{array}{llll} (Q_1) & \theta_1 = 0, & \theta_2 = 0, & z_1 = z_0, \\ (Q_2) & \theta_1 = 0, & \theta_2 = \pi, & z_1 = z_0, \\ (Q_3) & \theta_1 = \pi, & \theta_2 = 0, & z_1 = z_0, \\ (Q_4) & \theta_1 = \pi, & \theta_2 = \pi, & z_1 = z_0. \end{array}$$

Notando che l'energia potenziale si scrive nella forma

$$V = V_1 + V_2, \qquad V_1 = V_1(\theta_1,\theta_2) = -k\cos\theta_1 - k\cos(\theta_1 - \cos\theta_2), \quad V_2 = V_2(z_1) = mgz_1 + k\,z_1^2,$$

si possono studiare le due funzioni V_1 e V_2 separatamente. La matrice hessiana di V_1 è

$$\mathcal{H}(\theta_1,\theta_2) = \begin{pmatrix} k\cos\theta_1 + k\cos(\theta_1-\theta_2) & -k\cos(\theta_1-\theta_2) \\ -k\cos(\theta_1-\theta_2) & k\cos(\theta_1-\theta_2) \end{pmatrix}$$

così che si trova

$$\mathcal{H}(0,0) = \begin{pmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{pmatrix}, \quad \mathcal{H}(0,\pi) = \begin{pmatrix} 0 & k \\ k & -k \end{pmatrix}, \quad \mathcal{H}(\pi,0) = \begin{pmatrix} -2k & k \\ k & -k \end{pmatrix}, \quad \mathcal{H}(\pi,\pi) = \begin{pmatrix} 0 & -k \\ -k & k \end{pmatrix}.$$

Poiché $\det\mathcal{H}(0,\pi) = \det\mathcal{H}(\pi,\pi) = -k^2 < 0$, i due punti $(0,\pi)$ e (π,π) sono punti di sella per V_1; poiché $\det\mathcal{H}(\pi,0) = k^2 > 0$ e il primo elemento $-2k$ è negativo, il punto $(\pi,0)$ è un punto di massimo per V_1; infine, poiché $\det\mathcal{H}(0,0) = k^2 > 0$ e il primo elemento $2k$ è positivo, il punto $(0,0)$ è un punto di minimo per V_1. Poiché la derivata seconda di V_2 è $2k > 0$, z_0 è un punto di minimo per V_2. In conclusione la configurazione di equilibrio Q_1 è stabile, per il teorema di Dirichlet-Lagrange. Al contrario, le altre configurazioni di equilibrio, dal momento che corrispondono a punti di sella per l'energia potenziale totale V, sono instabili. Se il punto P_2 viene fissato nella configurazione $\theta_2 = 0$, la lagrangiana si semplifica in

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\big(\dot\theta_1^2 + \dot z_1^2\big) - \big(mgz_1 + k\big(z_1^2 - 2\cos\theta_1\big)\big)\,,$$

da cui si ottengono le equazioni di Eulero-Lagrange

$$m\ddot\theta_1 = -2k\sin\theta_1, \qquad m\ddot z_1 = -mg - 2kz_1.$$

Quindi le due equazioni si disaccoppiano e ciascuna di esse descrive un sistema unidimensionale. In termini della variabile $z := z_1 + mg/2k$, la seconda equazione diventa $m\ddot{z} = -2kz$, che descrive un oscillatore armonico di frequenza $\tilde{\omega} := \sqrt{2k/m}$, che può essere discusso come nel §7.2. La prima equazione descrive invece un pendolo di lunghezza $\ell := gm/2k$ (cfr. la (24.1)), il cui moto può essere discusso come nel §24. Infine, nel caso del punto (6), il moto avviene nel piano xz, che ruota intorno all'asse z con velocità angolare costante ω. I punti P_0 e P_2 sono fissi nelle configurazioni $P_1 = (1,1)$ e $P_2 = (1,-1)$, mentre il punto $P_1 = (x_1, z_1)$ è libero di muoversi nel piano. La lagrangiana del sistema è data da $\mathcal{L} = T - V$, con

$$T = \frac{1}{2}m\big(\dot{x}_1^2 + \dot{z}_1^2\big), \qquad V = mgz_1 + \frac{1}{2}k\big((x_1-1)^2 + (z_1-1)^2 + (x_1-1)^2 + (z_1+1)^2\big) - \frac{1}{2}m\omega^2 x_1^2,$$

dove l'ultimo termine rappresenta il contributo dovuto alla forza centrifuga (cfr. l'esercizio 7). Il sistema si disaccoppia nuovamente in due sistemi unidimensionali, i quali sono ora descritti dalla lagrangiane

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 &= T_1 - V_1, \qquad T_1 = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2, \qquad V_1 = k\big(x_1^2 - 2x_1\big) - \frac{1}{2}m\omega^2 x_1^2, \\ \mathcal{L}_2 &= T_2 - V_2, \qquad T_2 = \frac{1}{2}m\dot{z}_1^2, \qquad V_2 = kz_1^2 + mgz_1, \end{aligned}$$

da cui si ricavano le equazioni di Eulero-Lagrange

$$m\ddot{x}_1 = -\big(2k - m\omega^2\big)x_1 + 2k, \qquad m\ddot{z}_1 = -mg - 2kz_1.$$

Se $2k \neq m\omega^2$, si ha l'unica configurazione di equilibrio $(x_1, z_1) = (x_0, z_0)$, con $x_0 := 2k/(2k - m\omega^2)$ e z_0 definito come nel caso precedente; poiché la derivata seconda di V_1 vale $2k - m\omega^2$, tale configurazione di equilibrio è stabile se $2k > m\omega^2$ e instabile se $2k < m\omega^2$. Se, al contrario, si ha $2k = m\omega^2$, non si hanno configurazioni di equilibrio, dal momento che, tenuto conto che $k > 0$, il campo vettoriale è sempre diverso da zero in tal caso.]

Esercizio 42 Un sistema meccanico è costituito da 2 dischi omogenei di massa m e raggio $r = \sqrt{2}$, vincolati a rotolare senza strisciare in un piano verticale, il primo lungo la retta $y = x$ e il secondo lungo la retta $y = -x$. I centri C_1 e C_2 dei due dischi sono collegati tra loro da una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla. Inoltre i due dischi sono sottoposti alla forza di gravità; sia g l'accelerazione di gravità.
(1) Si scriva la lagrangiana del sistema, usando come coordinate lagrangiane le ascisse x_1 e x_2 dei punti di contatto P_1 e P_2 dei due dischi con le rispettive guide. [Si ricorda che il momento principale d'inerzia di un disco di massa m e raggio r intorno al proprio asse di rotazione è $I_3 = mr^2/2$.]
(2) Si scrivano le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange.
(3) Si determinino le configurazioni di equilibrio in funzione dei parametri positivi m, g e k.
(4) Se ne discuta la stabilità al variare dei parametri.
(5) Si determinino le configurazioni di equilibrio relativo se il piano ruota intorno all'asse y con velocità angolare costante ω e se ne discuta la stabilità al variare dei parametri m, g, k e ω.
(6) Si supponga ora che il primo disco sia fissato lungo la guida in modo tale che il suo centro C_1 si trovi sull'asse y; in tal caso si può utilizzare come coordinata lagrangiana la sola variabile x_2. Si calcolino le nuove configurazioni di equilibrio relativo e se ne discuta la stabilità, sempre nel caso in cui il piano ruoti intorno all'asse verticale con velocità angolare costante ω. In particolare si studi qualitativamente il moto del sistema unidimensionale corrispondente.

come si verifica immediatamente attraverso la sostituzione $t = \log q$, si trova

$$F_1(q,Q) = -\frac{Q^2}{4\log q} + q\log q + c(Q),$$

dove $c(Q)$ è una funzione arbitraria della sola Q. Dividendo la prima equazione della trasformazione pert la seconda si trova

$$P = \frac{Q}{2\log q} \implies -\frac{\partial F_1}{\partial Q} = P = \frac{Q}{2\log q} + \frac{\partial c}{\partial Q} = \frac{Q}{2\log q},$$

che consente di scegliere $c(Q) = 0$, così da ottenere $F_1(q,Q) = -Q^2/4\log q + q\log q$.]

Esercizio 98 Si consideri la trasformazione di coordinate

$$\begin{cases} Q = \dfrac{(1-qp)^2}{q^2p}, \\ P = \dfrac{q^2p}{1-qp}. \end{cases}$$

(1) Si dimostri che è canonica verificando che si conservano le parentesi di Poisson fondamentali.
(2) Si trovi una funzione generatrice di seconda specie $F(q,P)$.
(3) Si dimostri che $q^2p = QP^2$.
(4) Si utilizzi (3) e l'espressione di P in termini di q e p per esprimere q in termini di Q e P.
(5) Si calcoli la trasformazione inversa, esplicitando anche p in funzione di Q e P.
(6) Si consideri il sistema hamiltoniano descritto dall'hamiltoniana $H(q,p) = q^2p\,(1-qp)^{-1}$: si determini esplicitamente la soluzione con dati iniziali $(q(0),p(0)) = (1,2)$.
[*Soluzione.* Per calcolo esplicito, si trova

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial q} &= -\frac{2p(1-qp)}{q^2p} - \frac{2(1-qp)^2}{q^3p}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial p} = -\frac{2q(1-qp)}{q^2p} - \frac{(1-qp)^2}{q^2p^2}, \\ \frac{\partial P}{\partial q} &= = \frac{2qp}{1-qp} + \frac{q^2p^2}{(1-qp)^2}, \qquad \frac{\partial P}{\partial p} = \frac{q^2}{1-qp} + \frac{q^3p}{(1-qp)^2}, \end{aligned}$$

così che si ha

$$\begin{aligned} \{Q,P\} &= \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q} \\ &= -\left(\frac{2p(1-qp)}{q^2p} + \frac{2(1-qp)^2}{q^3p}\right)\left(\frac{q^2}{1-qp} + \frac{q^3p}{(1-qp)^2}\right) \\ &\quad +\left(\frac{2q(1-qp)}{q^2p} + \frac{(1-qp)^2}{q^2p^2}\right)\left(\frac{2qp}{1-qp} + \frac{q^2p^2}{(1-qp)^2}\right) \\ &= -\left(2 + \frac{2qp}{1-qp} + \frac{2(1-qp)}{qp} + 2\right) + \left(4 + \frac{2qp}{1-qp} + \frac{2(1-qp)}{qp} + 1\right) = 1. \end{aligned}$$

Dalla seconda equazione si ottiene

$$P(1-qp) = q^2p \quad\implies\quad P = p\left(qP + q^2\right) \quad\implies\quad p = \frac{P}{q(q+P)},$$

così che, integrando in q e utilizzando la definizione di procedimento di seconda specie, si trova

$$\frac{\partial F}{\partial q} = p = \frac{P}{q(q+P)} \quad\Longrightarrow\quad F(q,P) = \int \mathrm{d}q\, \frac{P}{q(q+P)} = \log q - \log(q+P) + c_1(P),$$

dove $c_1(q)$ è una funzione arbitraria di q. Nel calcolare l'integrale si è tenuto conto che

$$\frac{P}{q(q+P)} = \frac{A}{q} + \frac{B}{q+P} \quad\Longrightarrow\quad A = -B = 1.$$

Analogamente, inserendo l'espressione di p in termini di q e P nella prima equazione, si trova

$$Q = \frac{\left(1 - \dfrac{P}{q+P}\right)^2}{q\dfrac{P}{q+P}} = \frac{q^2(q+P)}{qP(q+P)^2} = \frac{q}{P(q+P)},$$

da cui si deduce, ragionando in modo analogo a prima per calcolare l'integrale,

$$\frac{\partial F}{\partial P} = Q = \frac{q}{P(q+P)} \quad\Longrightarrow\quad F(q,P) = \int \mathrm{d}P\, \frac{q}{P(q+P)} = \log P - \log(q+P) + c_2(q),$$

dove $c_2(P)$ è una funzione arbitraria di P. Le due espressioni diventano uguali scegliendo $c_1(P) = \log P$ e $c_2(q) = \log q$, da cui si ottiene la funzione generatrice di seconda specie

$$F(q,P) = \log q + \log P - \log(q+P) = \log\left(\frac{qP}{q+P}\right).$$

Si verifica facilmente che

$$QP^2 = \frac{(1-qp)^2}{q^2p}\frac{(q^2p)^2}{(1-qp)^2} = q^2p.$$

Si ha quindi

$$P = \frac{QP^2}{1 - \dfrac{QP^2}{q}} \quad\Longrightarrow\quad 1 - \frac{QP^2}{q} = QP \quad\Longrightarrow\quad \frac{QP^2}{q} = 1 - QP \quad\Longrightarrow\quad q = \frac{QP^2}{1-QP},$$

da cui si ricava immediatamente

$$p = \frac{QP^2}{(QP)^2}(1-QP)^2 = \frac{(1-QP)^2}{QP^2}.$$

Quindi la trasformazione inversa è da da

$$\begin{cases} q = \dfrac{QP^2}{1-QP}, \\ p = \dfrac{(1-QP)^2}{QP^2}. \end{cases}$$

Dal momento che la trasformazione è simplettica (in quanto canonica e indipendente dal tempo), l'hamiltoniana nelle coordinate (Q,P) è semplicemente l'hamiltoniana H espressa nelle nuove coordinate: quindi si ha $\hat{H}(Q,P) = P$. Le corrispondenti equazioni di Hamilton sono

$$\dot{Q} = 1, \qquad \dot{P} = 0,$$

che si integrano banalmente e dànno

$$Q(t) = Q(0) + t, \qquad P(t) = P(0),$$

dove i dati iniziali $Q(0)$ e $P(0)$ sono dati da

$$Q(0) = \frac{(1 - q(0)\,p(0))^2}{q^2(0)\,p(0)} = \frac{1}{2}, \quad P(0) = \frac{q^2(0)\,p(0)}{1 - q(0)\,p(0)} = -2 \quad \Longrightarrow \quad Q(t) = \frac{1}{2} + t, \qquad P(t) = -2.$$

In conclusione

$$q(t) = \frac{1 + 2t}{1 + t}, \qquad p(t) = \frac{1 + 2t + t^2}{1 + 2t}$$

rappresenta la soluzione delle equazioni del moto in termini delle coordinate originali.]