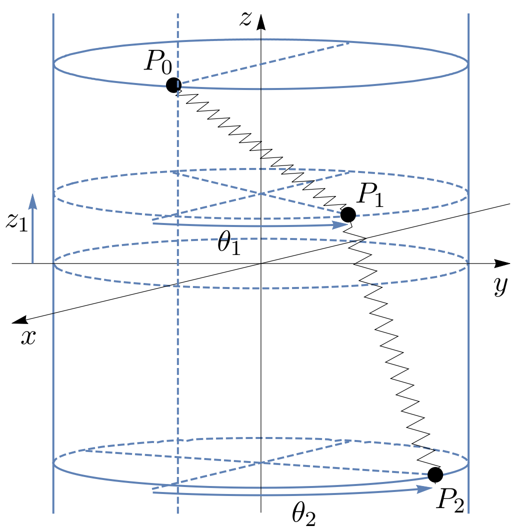
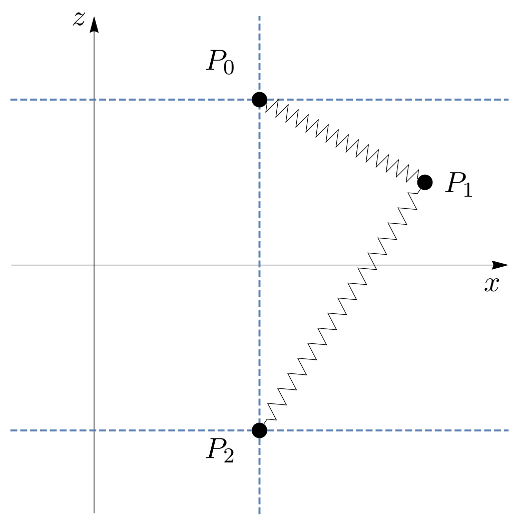
Corso di Laurea in Fisica - Corso di Laurea in Matematica
Anno Accademico 2018/2019

FM210 - Meccanica Analitica

Secondo appello (17-07-2019)

<u>Esercizio 1.</u> [24] Un sistema meccanico è costituito da 3 punti P_0, P_1 e P_2 di massa m vincolati a muoversi sulla superficie di un cilindro circolare retto di raggio $r = 1$. Si scelga un sistema di riferimento $Oxyz$, in cui l'asse z sia diretto lungo l'asse del cilindro: il punto P_0 è fisso e si trova a quota $z = 1$, il punto P_2 si muove lungo la circonferenza posta a quota $z = -1$, mentre il punto P_1 non ha ulteriori vincoli (cfr. la figura a sinistra). Due molle di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla collegano il punto P_1 ai due punti P_0 e P_2. I punti sono inoltre sottoposti alla forza di gravità, diretta verso il basso lungo l'asse z; sia g l'accelerazione di gravità.
(1.1) Si scriva la lagrangiana del sistema, usando come coordinate lagrangiane la coordinata z_1 di P_1 lungo l'asse z e gli angoli θ_1 e θ_2 che i punti P_1 e P_2 formano rispetto al punto P_0 (cfr. la figura a sinistra).
(1.2) Si scrivano le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange.
(1.3) Si determinino le configurazioni di equilibrio in funzione dei parametri positivi m, g e k.
(1.4) Se ne discuta la stabilità al variare dei parametri.
(1.5) Si verifichi che, se il punto P_2 viene fissato nella configurazione $\theta_2 = 0$, il sistema si disaccoppia in due sistemi unidimensionali e si discutano qualitativamente i due moti.
(1.6) Si supponga infine, sempre fissando il punto P_2 nella configurazione $\theta_2 = 0$, che il punto P_1 sia libero di muoversi nel piano che contiene l'asse z e i due punti P_0 e P_2 (cfr. la figura a destra), e che il cilindro ruoti intorno al proprio asse con velocità angolare costante ω: si determinino le configurazioni di equilibrio relativo del sistema nel piano rotante e se ne discuta la stabilità.





<u>Esercizio 2.</u> [12] Si consideri la seguente trasformazione di coordinate:

$$\begin{cases} Q = \dfrac{(1-qp)^2}{q^2 p}, \\ P = \dfrac{q^2 p}{1-qp}. \end{cases}$$

(2.1) Si dimostri che è canonica verificando che si conservano le parentesi di Poisson fondamentali.
(2.2) Si trovi una funzione generatrice di seconda specie $F(q, P)$.
(2.3) Si dimostri che $q^2 p = QP^2$.
(2.4) Si utilizzi il risultato (2.3) e l'espressione di P in termini di q e p per esprimere q in termini di Q e P.
(2.5) Si calcoli la trasformazione inversa della trasformazione data, esplicitando anche p in funzione di Q e P.
(2.6) Si consideri il sistema hamiltoniano descritto dall'hamiltoniana $H(q,p) = q^2 p\,(1-qp)^{-1}$: si usi il fatto che la trasformazione è canonica per determinare esplicitamente la soluzione con dati iniziali $(q(0), p(0)) = (1, 2)$.

Ogni foglio consegnato deve contenere: nome, numero di matricola, firma.
Non è consentito l'uso di libri, quaderni, appunti, telefonini e calcolatrici grafiche.