che ha determinante positivo e primo elemento positivo se e solo se $2k > m\omega^2$. In conclusione la configurazione di equilibrio Q, quando esiste, è stabile se $2k > m\omega^2$ e instabile se $2k < m\omega^2$. Se infine si fissa il primo disco in modo che il suo centro $C_1 = (x_1 - 1, x_1 + 1)$ si trovi sull'asse y, si deve avere $x_1 - 1 = 0$, così che $C_1 = (0, 2)$. Imponendo tale vincolo, la lagrangiana diventa

$$\mathcal{L} = T - V, \qquad T = \frac{3}{2} m \dot{x}_2^2, \quad V = k\, x_2^2 + 2kx_2 - mgx_2 - \frac{1}{2} m\omega^2 x_2^2 - m\omega^2 x_2,$$

e le equazioni di Eulero -Lagrange si riducono all'unica equazione

$$3m\ddot{x}_2 = -\left(2k - m\omega^2\right) x_2 - 2k + m\omega^2 + mg.$$

Se $2k = m\omega^2$, l'equazione diventa $3m\ddot{x}_2 = mg$, che descrive un moto uniformemente accelerato: le soluzioni sono della forma

$$x_2(0) = x(0) + \dot{x}(0)\, t + \frac{g}{6} t^2.$$

Se invece $2k \neq m\omega^2$, definendo

$$x := x_2 - 1 + \frac{mg}{2k - m\omega^2}, \qquad \kappa := \frac{2k - m\omega^2}{3m},$$

si ottiene l'equazione $\ddot{x} = -\kappa x$, che, se $\kappa > 0$ (i.e. $2k > m\omega^2$), descrive un oscillatore armonico di frequenza $\omega = \sqrt{\kappa}$, che può essere discusso come nel §7.2, mentre, se $\kappa < 0$ (i.e. $2k < m\omega^2$), descrive un sistema planare in cui l'origine è un punto di sella (cfr. il §7.1), dal momento che gli autovalori del sistema sono $\pm\sqrt{-\kappa}$.]

Esercizio 43 Un sistema meccanico è costituito da 3 punti materiali P_0, P_1 e P_2 di massa m vincolati a muoversi in un piano, che identificheremo con il piano xy, in modo da soddisfare i seguenti vincoli: il punto P_0 è fisso nell'origine, il punto P_1 si muove lungo la retta $y = 1$ e il punto P_2 è collegato al punto P_1 tramite un'asta di lunghezza ℓ e massa trascurabile. Inoltre due molle, entrambe di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla, collegano i punti P_1 e P_2 al punto P_0. I punti sono infine sottoposti alla forza di gravità, diretta verso il basso lungo l'asse y; sia g l'accelerazione di gravità.
(1.1) Si scriva la lagrangiana del sistema, usando come coordinate lagrangiane l'ascissa x di P_1 e l'angolo θ che l'asta forma rispetto all'asse x.
(1.2) Si scrivano le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange.
(1.3) Si determinino le configurazioni di equilibrio in funzione dei parametri positivi m, g e k.
(1.4) Se ne discuta la stabilità al variare dei parametri.
(1.5) Si verifichi che, se il punto P_1 viene fissato nella configurazione $x = 0$, il sistema si riduce a un sistema unidimensionale e se ne discuta qualitativamente il moto studiando le orbite nel piano $(\theta, \dot{\theta})$.
(1.6) Si supponga infine, nel caso in cui il punto P_1 sia libero di muoversi lungo l'asse $y = 1$, che l'asta sia omogenea e abbia massa M: si scriva la lagrangiana del sistema, si determinino le configurazioni di equilibrio e se ne discuta la stabilità al variare dei parametri positivi m, g, k e M.
[*Suggerimento.* Le coordinate dei punti P_0, P_1 e P_2 in termini delle coordinate suggerite sono $P_0 = (0, 0)$, $P_1 = (x, 1)$ e $P_2 = (x + \ell\cos\theta, 1 + \ell\sin\theta)$. L'energia cinetica del sistema è

$$T = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \left(\dot{x}^2 + \ell^2\dot{\theta}^2 - 2\ell\sin\theta\, \dot{x}\dot{\theta}\right),$$

mentre l'energia potenziale U è data da $V_{\rm gr} + V_{\rm el}$, dove $V_{\rm gr} = mg + mg\ell\sin\theta$ è l'energia potenziale gravitazionale e

$$V_{\rm el} = \frac{1}{2} k \left(x^2 + 1\right) + \frac{1}{2} k \left((x + \ell\cos\theta)^2 + (1 + \ell\sin\theta)^2\right)$$

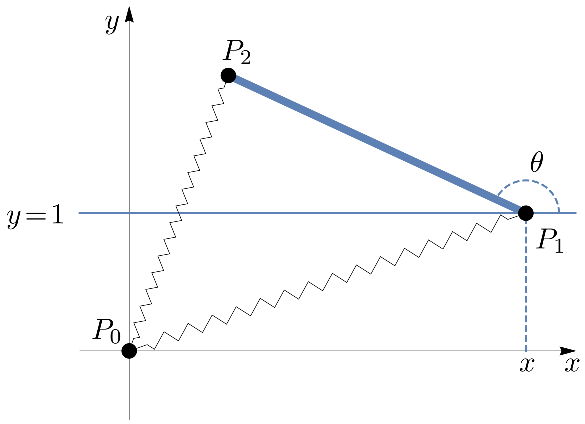

Figura 12.27: Sistema discusso nell'esercizio 43.

è l'energia potenziale elastica dovuta alle due molle. A meno di termini costanti che possono essere trascurati, la lagrangiana è quindi $\mathcal{L} = T - V$, dove

$$T = \frac{1}{2}m\left(2\dot{x}^2 + \ell^2\dot{\theta}^2 - 2\ell\sin\theta\,\dot{x}\dot{\theta}\right), \qquad V = mg\ell\sin\theta + k\left(x^2 + \ell x\cos\theta + \ell\sin\theta\right).$$

Le equazioni di Eulero-Lagrange sono, dopo aver semplificato opportunamente,

$$2m\ddot{x} - m\ell\sin\theta\,\ddot{\theta} - m\ell\cos\theta\,\dot{\theta}^2 = -2kx - k\ell\cos\theta, \qquad m\ell^2\ddot{\theta} - m\ell\sin\theta\ddot{x} = -mg\ell\cos\theta + k\ell x\sin\theta - k\ell\cos\theta.$$

Per determinare le configurazioni di equilibrio, si calcolano le derivate parziali dell'energia potenziale:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 2kx + k\ell\cos\theta, \qquad \frac{\partial V}{\partial \theta} = mg\ell\cos\theta - k\ell x\sin\theta + k\ell\cos\theta.$$

Imponendo che le due derivate siano nulle, dalla prima si ottiene $x = -(\ell/2)\cos\theta$, che inserita nella seconda, dà

$$\left(mg\ell + k\ell + \frac{1}{2}k\ell^2\sin\theta\right)\cos\theta = 0,$$

che è soddisfatta se $\cos\theta = 0$ (ovvero $\theta = \pm\pi/2$) oppure se

$$\sin\theta = -\alpha, \qquad \alpha := \frac{2}{\ell}\left(1 + \frac{mg}{k}\right).$$

Tenendo conto che, per costruzione, $\alpha > 0$, l'ultima equazione ammette soluzioni solo se $\alpha \in (0,1)$: in tal caso si hanno le due soluzioni $\theta = -\theta_0$ e $\theta = -\pi + \theta_0$, dove $\theta_0 := \arcsin\alpha$. In conclusione si hanno le seguenti configurazioni di equilibrio:

$$\begin{array}{lll}
(Q_1) & \theta = \pi/2, & x = 0, \\
(Q_2) & \theta = -\pi/2, & x = 0, \\
(Q_3) & \theta = -\theta_0, & x = -x_0, \\
(Q_4) & \theta = -\pi + \theta_0, & x = x_0,
\end{array}$$

con $x_0 := (\ell/2)\cos\theta_0$, dove le ultime due esistono se e solo $0 < \alpha < 1$. Per studiarne la stabilità si calcola la matrice hessiana:

$$\mathcal{H}(x,\theta) = \begin{pmatrix} 2k & -k\ell\sin\theta \\ -k\ell\sin\theta & -(k\ell+mg\ell)\sin\theta - k\ell x\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Si ha

$$\mathcal{H}(0,\pi/2) = \begin{pmatrix} 2k & -k\ell \\ -k\ell & -k\ell - mg\ell \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{H}(0,-\pi/2) = \begin{pmatrix} 2k & k\ell \\ k\ell & k\ell + mg\ell \end{pmatrix},$$

da cui si ottiene

$$\det\mathcal{H}(0,\pi/2) = -2k\,(k\ell+mg\ell) - k^2\ell^2,$$

che è sempre negativo, da cui segue che Q_1 è sempre una configurazione di equilibrio instabile, mentre

$$\det\mathcal{H}(0,-\pi/2) = 2k\,(k\ell+mg\ell) - k^2\ell^2 = k^2\ell^2\left(\frac{2}{\ell}\left(1+\frac{mg}{k}\right)-1\right) = k^2\ell^2(\alpha-1),$$

che è positivo se e solo se $\alpha > 1$, così che, tenendo conto che $2k > 0$, si deduce che la configurazione Q_2 è stabile se $\alpha < 1$. Il caso $\alpha = 1$ va discusso a parte: in tal caso, ponendo $\theta = -(\pi/2) + \varphi$, e utilizzando il fatto che $\sin\theta = -\cos\varphi$ e $\cos\theta = \sin\varphi$, si trova

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2}k\ell^2\sin\theta + kx^2 + k\ell x\cos\theta = \text{cost.} + \frac{1}{4}k\ell^2\varphi^2 + kx^2 + k\ell x\varphi - \frac{1}{2}k\ell^2\varphi^4 - \frac{1}{2}k\ell x\varphi^2 + \ldots \\ &= \text{cost.} + k\left(x + \frac{1}{2}\ell\,\varphi\right)^2 - \frac{1}{2}k\ell^2\varphi^4 - \frac{1}{2}k\ell x\varphi^2 + \ldots, \end{aligned}$$

che mostra che Q_2 è instabile per $\alpha = 1$: basta notare che lungo la retta $x = -(\ell/2)\varphi$ la funzione V assume la forma $V = (k\ell^2/4)\varphi^3 + \ldots$ e ha quindi un punto di sella in $\varphi = 0$. Si ha infine

$$\mathcal{H}(-x_0,-\theta_0) = \begin{pmatrix} 2k & k\ell\sin\theta_0 \\ k\ell\sin\theta_0 & (k\ell+mg\ell)\sin\theta_0 + (k\ell^2/2)\,\cos\theta_0 \end{pmatrix},$$

e, poiché $2k > 0$ e il determinante vale

$$2k(k\ell+mg\ell)\sin\theta_0 + k^2\ell^2\cos^2\theta_0 - k^2\ell^2\sin^2\theta_0 = k^2\ell^2\left(\frac{2}{\ell}\left(1+\frac{mg}{k}\right)\alpha + 1 - 2\alpha^2\right) = k^2\ell^2\left(1-\alpha^2\right),$$

se ne deduce che Q_3 è stabile per i valori di α per cui esiste (ovvero per $\alpha < 1$). Ragionando in modo analogo si trova che anche Q_4 è stabile quando esiste. Imponendo il vincolo $x = 0$, la lagrangiana si riduce a $\mathcal{L}_0 = T_0 - V_0$, dove

$$T_0 = \frac{1}{2}m\ell^2\dot\theta^2, \qquad V_0 = (mg\ell + k\ell)\sin\theta,$$

così che le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange sono

$$m\ell^2\ddot\theta = -\,(mg\ell + k\ell)\cos\theta$$

e descrivono un sistema unidimensionale che può essere studiato come il pendolo semplice del §24 (in termini della variabile traslata $\varphi := \theta - \pi/2$, di fatto il sistema è un pendolo). Infine, nel caso in cui l'asta sia omogenea e abbia massa $M > 0$, tenendo conto che il suo centro di massa ha coordinate $C = (x + (\ell/2)\,\cos\theta, 1 + (\ell/2)\,\sin\theta)$, l'energia cinetica ha un termine aggiuntivo dato da

$$T' = \frac{1}{2}M\left(\dot x^2 + \frac{1}{4}\ell^2\dot\theta^2 - \ell\sin\theta\,\dot x\dot\theta\right) + \frac{1}{2}I_3\dot\theta^2, \qquad I_3 = \frac{1}{12}M\ell^2,$$

mentre all'energia potenziale V del caso precedente si deve sommare il contributo

$$V' = \frac{M}{\ell} \int_0^\ell \mathrm{d}s \, g\,(1 + s\sin\theta) = Mg\frac{\ell}{2}\sin\theta + \text{cost.},$$

dovuto all'energia potenziale gravitazionale dell'asta. Le equazioni di Eulero-Lagrange diventano

$$\begin{aligned} &2m\ddot{x} - m\ell\sin\theta\,\ddot{\theta} - m\ell\cos\theta\,\dot{\theta}^2 + M\ddot{x} - \frac{M\ell}{2}\sin\theta\,\ddot{\theta} - \frac{M\ell}{2}\cos\theta\,\dot{\theta}^2 0 - 2kx - k\ell\cos\theta, \\ &m\ell^2\ddot{\theta} - m\ell\sin\theta\ddot{x} + \frac{M\ell^2}{4}\ddot{\theta} - \frac{M\ell}{2}\sin\theta\ddot{x} + I_3\ddot{\theta} = -mg\ell\cos\theta + k\ell x\sin\theta - k\ell\cos\theta - \frac{M\ell}{2}\cos\theta. \end{aligned}$$

L'esistenza delle configurazioni di equilibrio e la loro stabilità può essere discussa come nel caso precedente; basta ridefinire il parametro α, ponendo

$$\alpha := \frac{2}{\ell}\left(1 + \left(m + \frac{M}{2}\right)\frac{g}{k}\right).$$

Si trovano nuovamente le quattro configurazioni di equilibrio del caso precedente, con Q_3 e Q_4 espresse in termini del nuovo valore di α: in particolare, Q_1 è sempre instabile, mentre Q_2 è stabile per $\alpha > 1$ e instabile per $\alpha \leq 1$, laddove Q_3 e Q_4 esistono e sono stabili se e solo se $\alpha < 1$.]

$$Q(t) = Q(0) + t, \qquad P(t) = P(0),$$

dove i dati iniziali $Q(0)$ e $P(0)$ sono dati da

$$Q(0) = \frac{(1 - q(0)\,p(0))^2}{q^2(0)\,p(0)} = \frac{1}{2}, \quad P(0) = \frac{q^2(0)\,p(0)}{1 - q(0)\,p(0)} = -2 \quad \Longrightarrow \quad Q(t) = \frac{1}{2} + t, \qquad P(t) = -2.$$

In conclusione

$$q(t) = \frac{1+2t}{1+t}, \qquad p(t) = \frac{1+2t+t^2}{1+2t}$$

rappresenta la soluzione delle equazioni del moto in termini delle coordinate originali.]

Esercizio 99 Si consideri la seguente trasformazione di coordinate:

$$\begin{cases} Q = -p\sqrt{\dfrac{1-qp}{1+qp}}, \\ P = q\sqrt{\dfrac{1+qp}{1-qp}}. \end{cases}$$

(1) Si calcolino le derivate parziali di Q e P rispetto a q e p, e si dimostri che la trasformazione è canonica verificando che si conservano le parentesi di Poisson fondamentali.
(2) Si dimostri che $qp = -QP$ e si utilizzi tale risultato per ricavare q in termini di Q e P a partire dall'espressione di P in termini di q e p.
(3) Esplicitando anche p in funzione di Q e P, si calcoli la trasformazione inversa della trasformazione data.
(4) Si trovi una funzione generatrice di seconda specie $F(q, P)$.
(5) Si consideri il sistema hamiltoniano descritto dall'hamiltoniana $H(q,p) = q^2\,(1+qp)\,(1-qp)^{-1}$: si calcoli l'hamiltoniana nelle variabili (Q, P).
(6) Si usi il risultato del punto precedente per determinare esplicitamente la soluzione $(q(t), p(t))$ con dati iniziali $(q(0), p(0)) = (1, 0)$.
[*Soluzione.* Se si definisce $A := \sqrt{(1-qp)/(1+qp)}$, si può riscrivere $Q = -pA$ e $P = qA^{-1}$, così che si trova

$$\frac{\partial Q}{\partial q} = -p\frac{\partial A}{\partial q}, \quad \frac{\partial Q}{\partial p} = -A - p\frac{\partial A}{\partial p}, \quad \frac{\partial P}{\partial q} = \frac{1}{A} - \frac{q}{A^2}\frac{\partial A}{\partial q}, \quad \frac{\partial P}{\partial p} = -\frac{q}{A^2}\frac{\partial A}{\partial p},$$

dove

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial q} &= \frac{1}{2A}\frac{-p(1+qp) - p(1-qp)}{(1+qp)^2} = -\frac{1}{A}\frac{p}{(1+qp)^2}, \\ \frac{\partial A}{\partial p} &= \frac{1}{2A}\frac{-q(1+qp) - q(1-qp)}{(1+qp)^2} = -\frac{1}{A}\frac{q}{(1+qp)^2}. \end{aligned}$$

Si ottiene quindi

$$\begin{aligned} \{Q, P\} &= \frac{qp}{A^2}\frac{\partial A}{\partial q}\frac{\partial A}{\partial p} + \left(A + p\frac{\partial A}{\partial p}\right)\left(\frac{1}{A} - \frac{q}{A^2}\frac{\partial A}{\partial q}\right) \\ &= \frac{qp}{A^2}\frac{\partial A}{\partial q}\frac{\partial A}{\partial p} + 1 + \frac{p}{A}\frac{\partial A}{\partial p} - \frac{q}{A}\frac{\partial A}{\partial q} - \frac{qp}{A^2}\frac{\partial A}{\partial q}\frac{\partial A}{\partial p} = 1 + \frac{p}{A}\frac{\partial A}{\partial p} - \frac{q}{A}\frac{\partial A}{\partial q} \end{aligned}$$

e, ponendo $qp = x$, si trova

$$\frac{\partial A}{\partial q} = \frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial q} = p\frac{\partial A}{\partial x}, \quad \frac{\partial A}{\partial p} = \frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial p} = q\frac{\partial A}{\partial x} \quad \Longrightarrow \quad \frac{p}{A}\frac{\partial A}{\partial p} - \frac{q}{A}\frac{\partial A}{\partial q} = \frac{qp}{A}\frac{\partial A}{\partial x} - \frac{qp}{A}\frac{\partial A}{\partial x} = 0,$$

da cui segue che $\{Q,P\}=1$; poiché si ha banalmente $\{Q,Q\}=\{P,P\}=0$, se ne deduce che la trasformazione è canonica. Moltiplicando tra loro Q e P, si trova immediatamente che $QP=-qp$. Dall'espressione di P in teermini di q e p si trova

$$P^2\,(1-qp)=q^2\,(1+qp)\Longrightarrow P^2\,(1+QP)=q^2\,(1-QP)\Longrightarrow q^2=P^2\frac{1+QP}{1-QP}\Longrightarrow q=P\sqrt{\frac{1+QP}{1-QP}},$$

dove si è utilizzato che P e q devono avere lo stesso segno (per definizione di P). Si ha inoltre

$$p=-\frac{QP}{q}=-\frac{QP}{P}\sqrt{\frac{1-QP}{1+QP}}=-Q\sqrt{\frac{1-QP}{1+QP}},$$

così che in conclusione la trasformazione inversa è data da

$$\begin{cases} q=P\sqrt{\dfrac{1+QP}{1-QP}}, \\ p=-Q\sqrt{\dfrac{1-QP}{1+QP}}. \end{cases}$$

Per determinare una funzione generatrice di seconda specie $F(q,P)$, innanzitutto si esprime p in termini di q e P, i.e.

$$P^2\,(1-qp)=q^2\,(1+qp)\quad\Longrightarrow\quad P^2-q^2=p\,q(q^2+P^2))\quad\Longrightarrow\quad p=\frac{P^2-q^2}{q(q^2+P^2},$$

e si impone che p sia uguale a $\partial F/\partial q$; si scrive quindi

$$\frac{P^2-q^2}{q(q^2+P^2}=\frac{A}{q}+\frac{Bq+C}{q^2+P^2}\quad\Longrightarrow\quad A=1,\quad B=-2,\quad C=0,$$

così che si ottiene

$$F(q,P)=\int \mathrm{d}q\Big(\frac{1}{q}-\frac{2q}{q^2+P^2}\Big)=\log q-\log(q^2+P^2)+c_1(P),$$

dove $c_1(P)$ è una funzione arbitraria di P. Si ha inoltre

$$Q=-\frac{qp}{P}=-\frac{q}{P}\frac{P^2-q^2}{q(q^2+P^2}=\frac{P^2-q^2}{P(q^2+P^2},$$

così che, imponendo che Q sia uguale a $\partial F/\partial P$ e ragionando come prima, si trova

$$F(q,P)=\int \mathrm{d}P\Big(\frac{1}{P}-\frac{2P}{q^2+P^2}\Big)=\log P-\log(q^2+P^2)+c_2(q),$$

dove $c_2(q)$ è una funzione arbitraria di q. Infine, imponendo che le due espressioni di $F(q,P)$ coincidano, si ottiene la funzione generatrice di seconda specie

$$F(q,P)=\log q+\log P-\log(q^2+P^2)=\log\left(\frac{qP}{q^2+P^2}\right).$$

Nelle nuove variabili l'hamiltoniana data diventa $K(Q,P)=P^2$. Le equazioni di Hamilton sono banali: $\dot{Q}=2P$ e $\dot{P}=0$, da cui si ottiene immediatamente $Q(t)=Q(0)+2P(0)\,t$ e $P(t)=P(0)$. In corrispondenza dei dati iniziali scelti, risulta $Q(0)=0$ e $P(0)=1$, così che si ha $Q(t)=2t$ e $P(t)=1$. In conclusione la soluzione assume la forma

$$q(t)=\sqrt{\frac{1+2t}{1-2t}},\qquad p(t)=-2t\sqrt{\frac{1-2t}{1+2t}},$$

che è definita per $t\in(-1/2,1/2)$.]