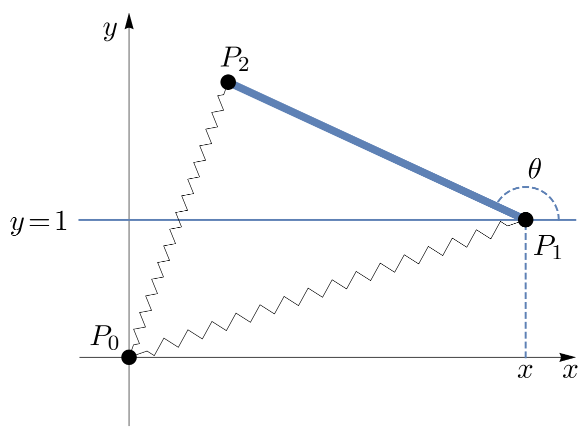
Corso di Laurea in Fisica - Corso di Laurea in Matematica
Anno Accademico 2018/2019

FM210 - Meccanica Analitica

Terzo appello (03-09-2019)

Esercizio 1. [24] Un sistema meccanico è costituito da 3 punti materiali P_0, P_1 e P_2 di massa m vincolati a muoversi in un piano, che identificheremo con il piano xy, in modo da soddisfare i seguenti vincoli: il punto P_0 è fisso nell'origine, il punto P_1 si muove lungo la retta $y = 1$ e il punto P_2 è collegato al punto P_1 tramite un'asta di lunghezza ℓ e massa trascurabile. Inoltre due molle, entrambe di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla, collegano i punti P_1 e P_2 al punto P_0. I punti sono infine sottoposti alla forza di gravità, diretta verso il basso lungo l'asse y; sia g l'accelerazione di gravità.
(1.1) Si scriva la lagrangiana del sistema, usando come coordinate lagrangiane l'ascissa x di P_1 e l'angolo θ che l'asta forma rispetto all'asse x.
(1.2) Si scrivano le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange.
(1.3) Si determinino le configurazioni di equilibrio in funzione dei parametri positivi m, g e k.
(1.4) Se ne discuta la stabilità al variare dei parametri.
(1.5) Si verifichi che, se il punto P_1 viene fissato nella configurazione $x = 0$, il sistema si riduce a un sistema unidimensionale e se ne discuta qualitativamente il moto studiando le orbite nel piano $(\theta, \dot{\theta})$.
(1.6) Si supponga infine, nel caso in cui il punto P_1 sia libero di muoversi lungo l'asse $y = 1$, che l'asta sia omogenea e abbia massa M: si scriva la lagrangiana del sistema, si determinino le configurazioni di equilibrio e se ne discuta la stabilità al variare dei parametri positivi m, g, k e M. [Il momento principale d'inerzia di un'asta di lunghezza ℓ e di massa M rispetto a un asse ortogonale passante per il suo centro di massa è $I_3 = M\ell^2/12$.]



Esercizio 2. [12] Si consideri la seguente trasformazione di coordinate:

$$Q = -p\sqrt{\frac{1-qp}{1+qp}}, \qquad P = q\sqrt{\frac{1+qp}{1-qp}}. \tag{1}$$

(2.1) Si calcolino le derivate parziali di Q e P rispetto a q e p, e si dimostri che la trasformazione è canonica verificando che si conservano le parentesi di Poisson fondamentali.
(2.2) Si dimostri che $qp = -QP$ e si utilizzi tale risultato per ricavare q in termini di Q e P a partire dall'espressione di P in termini di q e p.
(2.3) Esplicitando anche p in funzione di Q e P, si calcoli la trasformazione inversa della trasformazione data.
(2.4) Si trovi una funzione generatrice di seconda specie $F(q, P)$.
(2.5) Si consideri il sistema hamiltoniano descritto dall'hamiltoniana $H(q, p) = q^2 (1 + qp) (1 - qp)^{-1}$: si calcoli l'hamiltoniana nelle variabili (Q, P).
(2.6) Si usi il risultato del punto precedente per determinare esplicitamente la soluzione $(q(t), p(t))$ delle equazioni di Hamilton con dati iniziali $(q(0), p(0)) = (1, 0)$.

Ogni foglio consegnato deve contenere: nome, numero di matricola, firma.
Non è consentito l'uso di libri, quaderni, appunti, telefonini e calcolatrici grafiche.