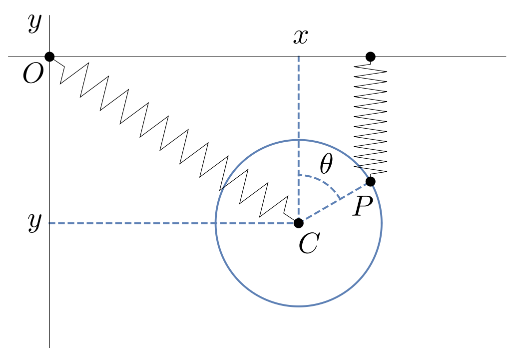
Corso di Laurea in Fisica
Anno Accademico 2018/2019

FM210 - Meccanica Analitica

Quinto appello (17-02-2020)

Esercizio 1. [24] Un sistema meccanico è costituito da un disco omogeneo di raggio $R = 1$ e massa $M = 1$, vincolato a muoversi in un piano verticale; una molla di lunghezza a riposo trascurabile e di costante elastica k collega il centro C del disco a un punto fisso O. Si scelga un sistema di riferimento la cui origine coincida con il punto O e il cui asse y sia diretto lungo la direzione verticale. Una seconda molla, sempre di lunghezza a riposo trascurabile e di costante elastica k, collega un punto P del bordo del disco a un punto mobile dell'asse x che ha la stessa ascissa di P. Il disco è infine sottoposto alla forza di gravità, diretta verso il basso lungo l'asse y; sia g l'accelerazione di gravità. [Il momento principale d'inerzia di un disco di massa M e raggio R rispetto a un asse ad esso ortogonale e passante per il suo centro di massa è $I_3 = MR^2/2$.]
(1.1) Si scriva la lagrangiana del sistema, usando come coordinate lagrangiane le coordinate (x, y) di C e l'angolo θ che il segmento CP forma rispetto all'asse y (cfr. la figura).
(1.2) Si scrivano le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange.
(1.3) Si determinino le configurazioni di equilibrio in funzione dei parametri positivi k e g.
(1.4) Se ne discuta la stabilità al variare dei parametri.
(1.5) Si supponga ora che il piano verticale ruoti intorno all'asse y con velocità angolare costante ω: si scriva la lagrangiana del sistema, si determinino le configurazioni di equilibrio e se ne discuta la stabilità al variare dei parametri positivi ω, k e g.



Esercizio 2. [12] Si consideri la seguente trasformazione di coordinate:

$$Q = 2(q^2 + 1)\sqrt{\frac{p}{2q} + 2q^2 + 1}, \qquad P = \sqrt{\frac{p}{2q} + 2q^2 + 1}.$$

(2.1) Si determini il dominio della trasformazione di coordinate,
(2.2) Si calcolino le derivate parziali di Q e P rispetto a q e p, e si dimostri che la trasformazione è canonica verificando che si conservano le parentesi di Poisson fondamentali.
(2.3) Si calcoli la trasformazione inversa della trasformazione data.
(2.4) Si trovi una funzione generatrice di seconda specie $F(q, P)$.
(2.5) Si calcoli l'hamiltoniana nelle variabili (Q, P) del sistema descritto dall'hamiltoniana

$$H(q, p) = \left(\frac{p}{2q} + 2q^2 + 1\right)^2,$$

(2.6) Si usi il risultato del punto precedente per determinare esplicitamente la soluzione $(q(t), p(t))$ delle equazioni di Hamilton con dati iniziali $(q(0), p(0)) = (1, 1)$.

Ogni foglio consegnato deve contenere: nome, numero di matricola, firma.
Non è consentito l'uso di libri, quaderni, appunti, telefonini e calcolatrici grafiche.