L'esistenza delle configurazioni di equilibrio e la loro stabilità può essere discussa come nel caso precedente; basta ridefinire il parametro α, ponendo

$$\alpha := \frac{2}{\ell}\left(1+\left(m+\frac{M}{2}\right)\frac{g}{k}\right).$$

Si trovano nuovamente le quattro configurazioni di equilibrio del caso precedente, con (Q_3) e (Q_4) espresse in termini del nuovo valore di α: in particolare, (Q_1) è sempre instabile, mentre (Q_2) è stabile per $\alpha > 1$ e instabile per $\alpha \leq 1$, laddove (Q_3) e (Q_4) esistono e sono stabili se e solo se $\alpha < 1$.]

Esercizio 44 Un sistema meccanico è costituito da tre punti materiali P_1, P_2 e P_3 di massa m vincolati a muoversi in un piano, che identificheremo con il piano xy, in modo da soddisfare i seguenti vincoli: il punto P_1 si muove lungo l'asse x, il punto P_2 si muove lungo l'asse y e il punto P_3 si muove lungo una guida circolare di raggio 1 e centro nell'origine. I tre punti sono collegati tra loro da tre molle di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla e sono sottoposti alla forza di gravità, diretta verso il basso lungo l'asse y (cfr. la figura 12.30); si indichi con g l'accelerazione di gravità.
(1) Si scriva la lagrangiana del sistema, utilizzando come coordinate lagrangiane l'ascissa x di P_1, l'ordinata y di P_2 e l'angolo θ che il segmento che unisce l'origine con il punto P_3 forma con l'asse y discendente.
(2) Si scrivano le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange.
(3) Si determinino le configurazioni di equilibrio in funzione dei parametri positivi m, g e k.
(4) Se ne discuta la stabilità al variare dei parametri.
(5) Si assuma ora che sul punto P_1 agisca un'ulteriore forza che tende ad allontanarlo dall'origine con un'intensità proporzionale alla sua distanza dall'origine: sia α la costante di proporzionalità. Si determinino le nuove configurazioni di equilibrio e, in particolare, si dimostri che continuano ad esistere quelle trovate per $\alpha = 0$ e, in più, ne compaiono altre due.
(6) Si discuta come cambia per $\alpha > 0$ la stabilità delle configurazioni di equilibrio trovate per $\alpha = 0$.

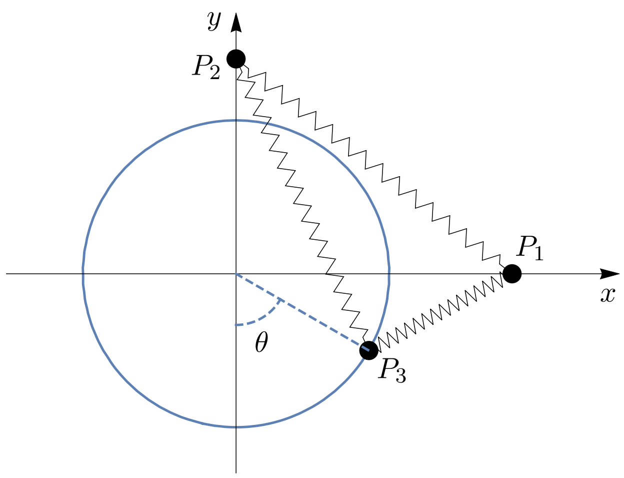

Figura 12.30: Sistema discusso nell'esercizio 44.

[*Suggerimento.* Le coordinate dei tre punti sono $P_1 = (x.0)$, $P_2 = (0, y)$ e $P_3 = (\sin\theta, -\cos\theta)$. La lagrangiana è $\mathcal{L} = T - V$, dove

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{\theta}^2\right), \qquad V = k\left(x^2 + y^2 - x\sin\theta + y\cos\theta\right) + mg\,(y - \cos\theta)\,.$$

Imponendo che sia annullino le derivate prime

$$\frac{\partial V}{\partial x} = k\,(2x - \sin\theta)\,, \qquad \frac{\partial V}{\partial \theta} = k\,(-x\cos\theta - y\sin\theta) + mg\sin\theta, \qquad \frac{\partial V}{\partial y} = k\,(2y + \cos\theta) + mg,$$

si trovano le due configurazioni di equilibrio

$$(Q_1) \quad x = 0, \quad \theta = 0, \quad y = -\frac{mg}{k} - 1, \qquad (Q_2) \quad x = 0, \quad \theta = \pi, \quad y = -\frac{mg}{k} + 1.$$

La matrice hessiana è data da

$$\mathcal{H}(x,\theta,y) = \begin{pmatrix} 2k & -k\cos\theta & 0 \\ -k\cos\theta & kx\sin\theta + (mg - ky)\cos\theta & -k\sin\theta \\ 0 & -k\sin\theta & 2k \end{pmatrix},$$

così che, definendo $\beta := mg/k$, si trova

$$\mathcal{H}(0,0,-\beta-1) = \begin{pmatrix} 2k & -k & 0 \\ -k & 2mg + k\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 2k \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{H}(0,\pi,-\beta+1) = \begin{pmatrix} 2k & k & 0 \\ k & -2mg - k\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 2k \end{pmatrix},$$

da cui si vede che (Q_1) è una configurazione stabile, mentre (Q_2) è instabile. Se $\alpha > 0$, l'energia potenziale, a cui si aggiunge il termine dovuto alla forza $(\alpha x, 0)$ che agisce sul punto P_2, diventa

$$V_\alpha := V - \frac{1}{2}\alpha x^2 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial V_\alpha}{\partial x} = k\,(2x - \sin\theta) - \alpha x,$$

mentre le altre derivate parziali non cambiano. Per discutere le configurazioni di equilibrio occorre distinguere i casi $2k \neq \alpha$ e $2k = \alpha$. Se $2k = \alpha$ si hanno le stesse configurazioni del caso precedente: ora però risultano entrambe instabili. Se $2k \neq \alpha$ si trovano di nuovo le due configurazioni di equilibrio precedenti e, nel solo caso in cui si abbia $\gamma := 3mg(\alpha - 2k)/\alpha k \in (-1, 1)$, alle due nuove configurazioni

$$(Q_3) \quad x = x_0, \quad \theta = \theta_0, \quad y = -\frac{mg}{k} - \cos\theta_0, \qquad (Q_4) \quad x = -x_0, \quad \theta = -\theta_0, \quad y = -\frac{mg}{k} + \cos\theta,$$

dove $\theta_0 \in [0, \pi/2)$ risolve l'equazione $\cos\theta_0 = \gamma$ e $x_0 := k\sin\theta_0/(2k - \alpha)$. La matrice hessiana, calcolata in corrispondenza delle configurazioni (Q_1) e (Q_2), è

$$\mathcal{H}(0,0,-\beta-1) = \begin{pmatrix} 2k - \alpha & -k & 0 \\ -k & 2mg + k & 0 \\ 0 & 0 & 2k \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{H}(0,\pi,-\beta+1) = \begin{pmatrix} 2k - \alpha & k & 0 \\ k & -2mg - k & 0 \\ 0 & 0 & 2k \end{pmatrix}.$$

La configurazione (Q_2) è sempre instabile (la sottomatrice che si ottiene $\mathcal{H}(0,\pi,-\beta+1)$ cancellando la terza riga e la terza colonna o ha determinante negativo o ha determinante positivo ma primo elemento negativo). La configurazione (Q_1) è stabile se $k(4mg + k) \geq (2mg + k)\alpha$. Il caso in cui vale il segno uguale va discusso a parte: in tal caso il determinante della matrice hessiana si annulla, ma poiché la funzione V tende a $+\infty$ se $x \to +\infty$ o $y \to +\infty$ (dal momento che $2k - \alpha > 0$ se $k(4mg + k) = (2mg + k)\alpha)$ ed è periodica in θ, essa deve avere necessariamente un punto di minimo (isolato), che, per il teorema di Lagrange-Dirichlet, corrisponde a una configurazione stabile.]