

ESERCIZIO 1. [24] Un sistema meccanico è costituito da 3 punti materiali P_1 , P_2 e P_3 di massa m vincolati a muoversi in un piano, che identificheremo con il piano xy , in modo da soddisfare i seguenti vincoli: il punto P_1 si muove lungo l'asse x , il punto P_2 si muove lungo l'asse y e il punto P_3 si muove lungo una guida circolare di raggio 1 e centro nell'origine. Inoltre i tre punti sono collegati tra loro da tre molle di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla e sono sottoposti alla forza di gravità, diretta verso il basso lungo l'asse y (cfr. la figura); si indichi con g l'accelerazione di gravità.

(1.1) Si scriva la lagrangiana del sistema, usando come coordinate lagrangiane l'ascissa x di P_1 , l'ordinata y di P_2 e l'angolo θ che il segmento che unisce l'origine con il punto P_3 forma con l'asse y discendente.

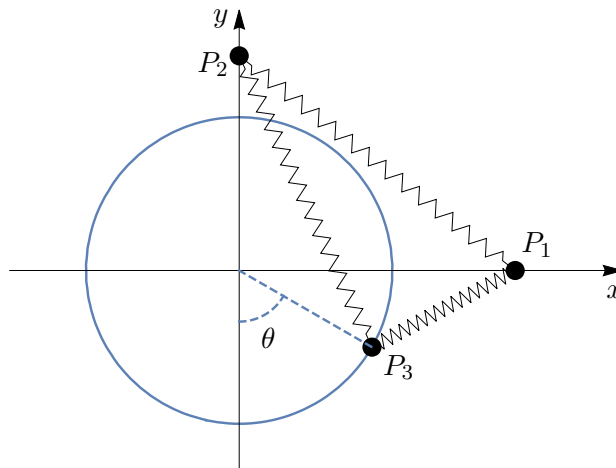
(1.2) Si scrivano le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange.

(1.3) Si determinino le configurazioni di equilibrio in funzione dei parametri positivi m , g e k .

(1.4) Se ne discuta la stabilità al variare dei parametri.

(1.5) Si assuma ora che sul punto P_1 agisca un'ulteriore forza che tende ad allontanarlo dall'origine con un'intensità proporzionale alla sua distanza dall'origine: sia $\alpha \geq 0$ la costante di proporzionalità. Si determinino le nuove configurazioni di equilibrio e, in particolare, si dimostri che quelle trovate per $\alpha = 0$ continuano ad esistere per $\alpha > 0$ e, in più, ne compaiono altre due.

(1.6) Si discuta come cambia la stabilità delle configurazioni di equilibrio trovate per $\alpha = 0$ quando si ha $\alpha > 0$.



ESERCIZIO 2. [12] Si consideri il sistema hamiltoniano descritto dalla hamiltoniana

$$H(q, p) = qp(qp - 1) \log p.$$

(2.1) Si scrivano le corrispondenti equazioni di Hamilton.

(2.2) Si calcoli la trasformazione canonica $(q, p) \mapsto (Q, P)$ ottenuta dalla funzione generatrice $F(q, P) = qe^P$ attraverso un procedimento di seconda specie.

(2.3) Si determini la trasformazione inversa $(Q, P) \mapsto (q, p)$.

(2.3) Si calcoli l'hamiltoniana del sistema nelle nuove coordinate (Q, P) .

(2.4) Si scrivano le equazioni di Hamilton nelle nuove variabili.

(2.5) Si integrino le equazioni di Hamilton nelle variabili (Q, P) .

(2.6) Si utilizzino i risultati (2.5) e (2.3) per scrivere le soluzioni delle equazioni di Hamilton trovate in (2.1).

Ogni foglio consegnato deve contenere: nome, numero di matricola, firma.

Non è consentito l'uso di libri, quaderni, appunti, telefonini e calcolatrici grafiche.