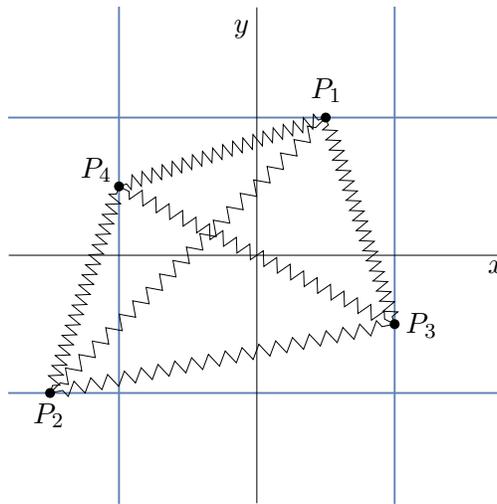


Corso di Laurea in Fisica - Corso di Laurea in Matematica
Anno Accademico 2018/2019
FM210 - Meccanica Analitica

SECONDA PROVA D'ESONERO (05-06-2019)

ESERCIZIO 1. [24] Un sistema meccanico è costituito da 4 punti materiali P_1 , P_2 , P_3 e P_4 , tutti di massa m , vincolati a muoversi in un piano verticale, che identificheremo con il piano xy , il primo lungo la retta $y = 1$, il secondo lungo la retta $y = -1$, il terzo lungo la retta $x = 1$ e il quarto lungo la retta $x = -1$. I quattro punti sono collegati l'uno con l'altro da molle di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla. Inoltre essi sono sottoposti alla forza di gravità; sia g l'accelerazione di gravità.

- (1.1) Si scriva la lagrangiana del sistema, usando come coordinate lagrangiane le ascisse x_1 e x_2 dei punti P_1 e P_2 e le ordinate y_3 e y_4 dei punti P_3 e P_4 .
- (1.2) Si scrivano le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange.
- (1.3) Si determinino le configurazioni di equilibrio in funzione dei parametri m , g e k .
- (1.4) Se ne discuta la stabilità al variare dei parametri.
- (1.5) Si calcoli la forza vincolare che agisce sul punto P_1 .
- (1.6) Si discuta come cambiano le configurazioni di equilibrio se il piano ruota intorno all'asse y con velocità angolare costante ω e se ne discuta la stabilità al variare dei parametri m , g , k e ω .



ESERCIZIO 2. [12] Si consideri la lagrangiana

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} (q + 1)^2 \dot{q}^2, \quad q + 1 > 0.$$

- (2.1) Si calcoli l'hamiltoniana $\mathcal{H}(q, p)$ associata a \mathcal{L} , e si scrivano le equazioni di Hamilton corrispondenti.
- (2.2) Si consideri la trasformazione di coordinate

$$\begin{cases} Q = q^2 + 2q + \frac{p}{q+1}, \\ P = \frac{p}{2(q+1)}, \end{cases}$$

se ne determini dominio e codominio.

- (2.3) Si dimostri che la trasformazione è canonica verificando esplicitamente che si conservano le parentesi di Poisson fondamentali.
- (2.4) Si trovi una funzione generatrice di seconda specie $F(q, P)$ della trasformazione data.
- (2.5) Si calcoli la trasformazione inversa e se ne determini il dominio.
- (2.6) Si determini l'hamiltoniana nel sistema di coordinate (Q, P) , e si usi il risultato per trovare la soluzione $q(t)$ delle equazioni di Eulero-Lagrange con dati iniziali $(q(0), \dot{q}(0)) = (1, 1)$.

Ogni foglio consegnato deve contenere: nome, numero di matricola, firma.
Non è consentito l'uso di libri, quaderni, appunti, telefonini e calcolatrici grafiche.