

Esercizio 1

Due sferette puntiformi di massa m si muovono sotto l'effetto di una forza esterna costante $\mathbf{F} = (F_1, F_2, 0)$ con $F_1, F_2 > 0$ e sotto l'effetto di una forza di attrazione reciproca centrale di energia potenziale

$$V(\rho) = \frac{\alpha r_0 \rho}{\sqrt{r_0^2 + \rho^2}} \quad \alpha, r_0 > 0$$

tali che

$$\begin{cases} m\ddot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{F} - \partial_{\mathbf{x}_1} V(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|) \\ m\ddot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{F} - \partial_{\mathbf{x}_2} V(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|) \end{cases}$$

$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^3$.

Si supponga che

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1(0) &= \mathbf{0} & \dot{\mathbf{x}}_1(0) &= \mathbf{0} \\ \mathbf{x}_2(0) &= (d, 0, 0) & \dot{\mathbf{x}}_2(0) &= (-v_1, v_2, 0) \end{aligned} \quad d, v_1, v_2 > 0.$$

- Risolvere esplicitamente il moto del centro di massa.
- Determinare gli integrali primi per $\mathbf{r} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ e calcolare i valori corrispondenti ai dati iniziali assegnati.
- Al variare degli integrali primi, disegnare il grafico dell'energia potenziale efficace e le curve di livello nel piano $(\rho, \dot{\rho})$ e discutere qualitativamente la natura del moto radiale e del moto complessivo.

(II Appello a.a. 2012/2013, Prof. Alessandro Giuliani)

Esercizio 2

Un punto materiale di massa m si muove in una dimensione sotto l'effetto di un'energia potenziale

$$V(x) = 2 \arctan x + x \log(1 + x^2) - 3x.$$

- Scrivere l'equazione del moto.
- Identificare una grandezza conservata.
- Calcolare i punti di equilibrio e discutere la stabilità.
- Disegnare il grafico dell'energia potenziale.
- Disegnare le orbite nel piano delle fasi analizzando qualitativamente il moto al variare dei dati iniziali.
- Identificare i dati iniziali corrispondenti a moti periodici.
- Per i valori dell'energia corrispondenti a moti periodici, scrivere il periodo in forma di un integrale definito.