Esercizio 1. Terzo scritto 2016/2017 Prof. Alessandro Giuliani

Un punto materiale P di massa m è vincolato a muoversi senza attrito sulla superficie di equazione $z = \ell \log(\frac{x^2+y^2}{\ell^2})$, con $\ell > 0$. Il vincolo può supporsi ideale. Oltre alle forze di reazione vincolare, il punto è soggetto a due forze attive conservative: la forza peso e la forza $\mathbf{F} := k \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$, con $k > 0$.

1. Si descriva il vincolo in coordinate cilindriche (z, ρ, θ) e si scriva la Lagrangiana del sistema, usando come coordinate Lagrangiane le variabili ρ e θ.
2. Si riconosca che il sistema ammette una coordinata ciclica. Si identifichino le grandezze conservate del sistema.
3. Si scriva la Lagrangiana ridotta.
4. Si risolvano le equazioni del moto per le variabili ρ e θ per quadrature. Dopo aver disegnato le curve di livello nel piano delle fasi ridotto $(\rho, \dot{\rho})$, al variare delle grandezze conservate del sistema, si discuta la natura qualitativa del moto radiale e del moto complessivo (discussione lasciata per esercizio).

Esercizio 2. Esercizio 29, cap. 12, Prof. Guido Gentile

Si consideri il sistema lagrangiano costituito da un punto materiale P di massa $m = 1$, vincolato a muoversi in un piano verticale, che identificheremo con il piano (x, y), lungo una guida descritta dall'equazione $y = x^2$. Il piano verticale ruota intorno all'asse verticale y con velocità angolare costante ω. Il punto P è sottoposto alla forza di gravità ed è collegato all'estremo di una molla di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla, che ha l'altro estremo fissato nell'origine. Sia g l'accelerazione di gravità.

1. Si scrivano la lagrangiana del sistema e le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange.
2. Si trovino le configurazioni di equilibrio in un sistema di riferimento solidale con il piano rotante.
3. Se ne discuta la stabilità.
4. Si determini la forza vincolare che agisce sul punto P in corrispondenza di una configurazione di equilibrio stabile (se esiste) per i valori dei parametri $\omega = \sqrt{11}$, $k = 1$, $g = 1$.