Esercizio 1

Una sbarretta sottile di massa m e lunghezza ℓ ha un estremo fissato nell'origine ed oscilla sotto l'azione della forza peso. Sia ϑ l'angolo che la sbarretta forma con la verticale. Scrivere la Lagrangiana in funzione dell'angolo ϑ e calcolare le equazioni di Eulero Lagrange.

Soluzione: Il centro di massa del sistema ha coordinate $C = (\frac{\ell}{2}\sin\vartheta, -\frac{\ell}{2}\cos\vartheta)$. Quindi possiamo scrivere la Lagrangiana

$$\mathcal{L}(\vartheta, \dot{\vartheta}) := T - U = \frac{m\ell^2\dot{\vartheta}^2}{6} + \frac{mg\ell}{2}\cos\vartheta$$

e la rispettiva equazione di Eulero-Lagrange

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\vartheta}} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\vartheta} \qquad \ddot{\vartheta} = -\frac{3g}{2\ell}\sin\vartheta.$$

Esercizio 2

Due asticelle sottili OA e AB omogenee di lunghezza ℓ e massa m hanno un vertice comune A, il punto O è fisso e il punto B si trova sull'asse orizzontale x, come rappresentato in figura 1. Il sistema è soggetto alla forza peso. Calcolare la Lagrangiana e le equazioni di Eulero-Lagrange.

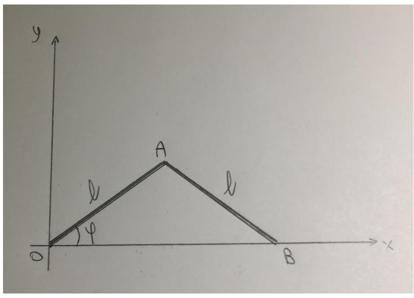

Figura 1

Soluzione: I centri di massa delle due sbarrette sono rispettivamente

$$C_1 = (\frac{\ell}{2}\cos\varphi, \frac{\ell}{2}\sin\varphi) \qquad C_2 = (\frac{3}{2}\ell\cos\varphi, \frac{\ell}{2}\sin\varphi).$$

La Lagrangiana del sistema è quindi

$$\mathcal{L}(\varphi, \dot{\varphi}) = \frac{m\ell^2}{3}\dot{\varphi}^2(1 + 3\sin^2\varphi) - mg\ell\sin\varphi.$$

e l'equazione di Eulero Lagrange associata è

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} \qquad \ddot{\varphi}(1 + 3\sin^2\varphi) = -3\dot{\varphi}^2\sin\varphi\cos\varphi - \frac{3g}{2\ell}\cos\varphi.$$

Esercizio 3

Un sistema meccanico è costituito da due sbarre uguali, rettilinee, omogenee di massa M e lunghezza ℓ, vincolate a muoversi su un piano verticale. La sbarra AB ha l'estremo A vincolato a scorrere sulla retta

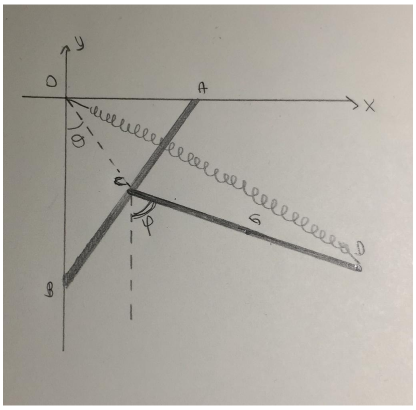

Figura 2

orizzontale passante per O, mentre l'estremo B è vincolato a scorrere sulla retta verticale passante per O, come descritto in figura 2.

La sbarra CD ha l'estremo C incernierato nel punto di mezzo della sbarra AB. Oltre alla forza gravitazionale, il sistema è soggetto a una forza elastica di costante elastica k, che agisce su D e ha centro in O. Tutti i vincoli sono supposti ideali. Calcolare la Lagrangiana e le equazioni di Eulero Lagrange usando come coordinate Lagrangiane gli angoli ϑ e φ mostrati in figura 2.

Soluzione: Il centro di massa della sbarretta AB ha coordinate

$$C = (\frac{\ell}{2}\sin\vartheta, -\frac{\ell}{2}\cos\vartheta).$$

Il centro di massa della sbarretta CD ha coordinate

$$G = (\frac{\ell}{2}\sin\vartheta + \frac{\ell}{2}\sin\varphi, -\frac{\ell}{2}\cos\vartheta - \frac{\ell}{2}\cos\varphi).$$

L'energia cinetica e l'energia potenziale assumono quindi la seguente espressione

$$\begin{aligned} T &= \frac{7}{24}m\ell^2\dot\vartheta^2 + \frac{m\ell^2}{6}\dot\varphi^2 + \frac{1}{4}m\ell^2\dot\vartheta\dot\varphi\cos(\vartheta-\varphi) \\ U &= -mg\ell\cos\vartheta - \frac{mg\ell}{2}\cos\varphi + \frac{1}{2}k\ell^2\cos(\vartheta-\varphi), \end{aligned}$$

e la Lagrangiana del sistema è $\mathcal{L}(\vartheta,\varphi,\dot\vartheta,\dot\varphi) = T - U$. Le equazioni di Eulero Lagrange sono

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\vartheta} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\vartheta}$$

$$\frac{7}{12}m\ell^2\ddot\vartheta + \frac{1}{4}m\ell^2\ddot\varphi\cos(\vartheta-\varphi) + \frac{1}{4}m\ell^2\dot\varphi^2\sin(\vartheta-\varphi) = -mgl\sin\vartheta + \frac{k\ell^2}{2}\sin(\vartheta-\varphi)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\varphi} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi}$$

$$\frac{m\ell^2}{3}\ddot\varphi + \frac{1}{4}m\ell^2\ddot\vartheta\cos(\vartheta-\varphi) - \frac{1}{4}m\ell^2\dot\vartheta^2\sin(\vartheta-\varphi) = -\frac{mgl}{2}\sin\varphi - \frac{k\ell^2}{2}\sin(\vartheta-\varphi).$$

Esercizio 4

Esercizio 28, cap. 12, Prof. Guido Gentile

http://www.mat.uniroma3.it/users/gentile/2018-2019/FM210/testo/volume2-105-130.pdf
punti (1), (2), (4).