Esercizio 1

Esercizio 28, cap. 12, Prof. Guido Gentile

http://www.mat.uniroma3.it/users/gentile/2018-2019/FM210/testo/volume2-105-130.pdf
punti (5), (6).

Esercizio 2

Una sbarra rigida rettilinea AB di lunghezza ℓ e massa m ha l'estremo B vincolato su una parabola di equazione $y = \frac{\ell}{\lambda^2}x^2$. L'estremo A della sbarretta è vincolato a muoversi sull'asse x con $x_B > x_A$, vedere Figura 1.

- Scrivere la Langrangiana in funzione di $x \equiv x_B$.
- Calcolare le equazioni di Eulero Lagrange.
- Calcolare i punti di equilibrio e discuterne la stabilità.

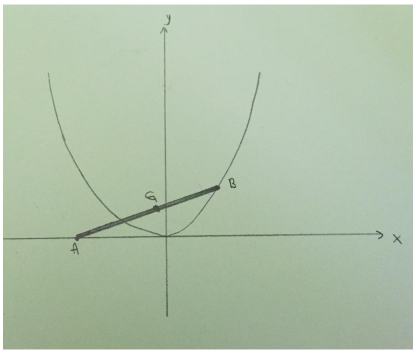

Figura 1

Soluzione: Sia $x \equiv x_B$; l'estremo B è vincolato a muoversi sulla parabola, quindi in particolare B ha coordinate $B = (x, \frac{\ell}{\lambda^2}x^2)$. Notiamo inoltre che $|x| < \lambda$: infatti se fosse $x = \pm\lambda$ si avrebbe $B(\pm\lambda, \ell)$ e $A = (\pm\lambda, 0)$, configurazione che non è possibile dal momento che per ipotesi $x_B > x_A$. Definiamo ϑ l'angolo che la sbarretta forma con l'asse x: il centro di massa ha quindi coordinate

$$G = (x - \frac{\ell}{2}\cos\vartheta, \frac{\ell}{2}\sin\vartheta).$$

Notiamo che l'angolo ϑ e la coordinata lagrangiana x sono legate dalla seguente relazione:

$$\frac{\ell}{\lambda^2}x^2 = \ell\sin\vartheta \quad \Rightarrow \quad \sin\vartheta = \frac{x^2}{\lambda^2},\ \cos\vartheta = \sqrt{1 - \frac{x^4}{\lambda^4}}$$
$$\Rightarrow \dot{\vartheta} = \frac{2x\dot{x}}{\sqrt{\lambda^4 - x^4}}.$$

Usando questa relazione e il teorema di König, si può calcolare l'energia cinetica:

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2\Big(1 + \frac{4}{3}\ell^2\frac{x^2}{\lambda^4 - x^4} + \frac{2\ell x^3}{\lambda^2\sqrt{\lambda^4 - x^4}}\Big).$$

L'energia potenziale è $U = \frac{\ell}{2} mg \frac{x^2}{\lambda^2}$, quindi la lagrangiana in funzione della variabile x è

$$\mathcal{L}(x, \dot{x}) = T - U.$$

L'unica configurazione di equilibrio si ha per $x = 0$ che è stabile.

Esercizio 3 II Esonero, a.a. 2007/2008, Prof. Elisabetta Scoppola
Determinare la costante α e la funzione $g(p)$ tali che la trasformazione:

$$P = g(p) \sinh q, \qquad Q = p^{\alpha} \cosh q$$

sia canonica.

Una volta verificato che $g(p) = -2\sqrt{p}$ e $\alpha = -2$:

- trovare una funzione generatrice di prima specie per la trasformazione di coordinate;
- usare la trasformazione per risolvere le equazioni del moto per l'hamiltoniana

$$\mathcal{H}(p, q) = p \cosh^2 q.$$