Esercizio 1
Si consideri il seguente sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} \dot{q} = 5q + 6p \\ \dot{p} = -4q - 5p \end{cases} \tag{1}$$

1. Si riconosca che tale sistema è Hamiltoniano e si calcoli l'Hamiltoniana $\mathcal{H}(q, p)$.
2. Si scriva la trasformazione canonica $Q = Q(q, p), P = P(q, p)$ associata alla funzione generatrice (di seconda specie)
$$F(q, P) = \frac{qP}{3} + \frac{P^2}{6} - \frac{q^2}{3}.$$
3. Usando la trasformazione canonica trovata al punto precedente, si determini l'Hamiltoniana $\tilde{\mathcal{H}}(Q, P)$ nelle nuove coordinate.
4. Si risolvano le equazioni di Hamilton associate ad $\tilde{\mathcal{H}}(Q, P)$, per un dato iniziale generico $(Q(0), P(0))$.
5. Nel contesto del punto precedente, si consideri il dato iniziale speciale corrispondente (nelle variabili originali) a $q(0) = p(0) = 1$ e si determini esplicitamente le soluzioni $q = q(t)$ e $p = p(t)$ corrispondenti a tali dati iniziali.
6. Si verifichi che la soluzione $q(t), p(t)$ trovata al punto precedente risolve (1).

Soluzione.

1. Per dimostrare che il sistema è Hamiltoniano, bisogna trovare una funzione $\mathcal{H} = \mathcal{H}(q, p)$ tale che
$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} \\ \dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q}. \end{cases}$$
Integrando la prima equazione troviamo: $\mathcal{H}(q, p) = 5pq + 3p^2 + f(q)$ con $f(q)$ una funzione da determinare. Derivando tale espressione rispetto a q e usando la seconda equazione, troviamo: $f'(q) = 4q$, e quindi:
$$\mathcal{H}(q, p) = 3p^2 + 5pq + 2q^2.$$
2. La trasformazione associata alla funzione generatrice data è una trasformazione di II specie: sappiamo quindi che
$$p = \frac{\partial f}{\partial q} = \frac{P}{3} - \frac{2}{3}q$$
$$Q = \frac{\partial f}{\partial P} = \frac{q}{3} + \frac{P}{3},$$
da cui possiamo ricavare le trasformazioni di coordinate diretta e inversa:
$$\begin{cases} Q = p + q \\ P = 3p + 2q, \end{cases} \qquad \begin{cases} q = 3Q - P \\ p = -2Q + P. \end{cases}$$
3. L'Hamiltoniana nelle nuove coordinate è $\tilde{\mathcal{H}}(Q, P) = QP$.

4. Le equazioni di Hamilton per $\tilde{\mathcal{H}}$ sono

$$\begin{cases} \dot{Q} = \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial P} = Q, \\ \dot{P} = -\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial Q} = -P, \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} Q(t) = Q(0)e^{t}, \\ P(t) = P(0)e^{-t}. \end{cases}$$

5. Sapendo che $q(0) = p(0) = 1$ possiamo ricavare i dati iniziali delle coordinate Q, P, infatti

$$Q(0) = p(0) + q(0) = 2, \qquad P(0) = 3p(0) + 2q(0) = 5.$$

   Con questi dati iniziali, la soluzione delle equazioni di Hamilton per l'Hamiltoniana $\tilde{\mathcal{H}}(Q, P)$ è

$$Q(t) = 2e^{t}, \qquad P(t) = 5e^{-t}.$$

   Utilizzando la trasformazione canonica ricavata nel punto (2), possiamo trovare la soluzione delle equazioni di Hamilton per $\mathcal{H}(q, p)$:

$$q(t) = 6e^{t} - 5e^{-t}, \quad p(t) = -4e^{t} + 5e^{-t}. \tag{2}$$

6. Derivando le soluzioni trovate al punto precedente, sappiamo che $\dot{q} = 6e^{t} + 5e^{-t}$ e $\dot{p} = -4e^{t} - 5e^{-t}$. Sostituendo le espressioni di $q(t)$ e $p(t)$ in (1) possiamo facilmente vedere che $5q(t) + 6p(t) = 6e^{t} + 5e^{-t}$ e $-4q(t) + 5p(t) = -4e^{t} - 5e^{-t}$. Pertanto abbiamo verificato che (2) è soluzione di (1).

Esercizio 2 Primo scritto, a.a. 2014/2015, Prof. Alessandro Giuliani
Si consideri la Lagrangiana

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}(\dot{q} \sin q)^2 - \cos^2(q) \quad q \in (0, \pi).$$

- Si determini l'Hamiltoniana e si scrivano le equazioni di Hamilton corrispondenti.
- Si scriva la trasformazione canonica $Q = Q(q, p), P = P(q, p)$ associata alla funzione generatrice (di seconda specie)

  $$F(q, P) = P \cos q,$$

  specificandone il dominio di invertibilità. Su tale dominio, si scriva esplicitamente la trasformazione inversa.
- Usando la trasformazione canonica trovata al punto precedente, si determini l'Hamiltoniana $\tilde{\mathcal{H}}(Q, P)$ nelle nuove coordinate.
- Si risolvano le equazioni di Hamilton associate ad $\tilde{\mathcal{H}}(Q, P)$, per un dato iniziale generico (Q_0, P_0).
- Nel contesto del punto precedente, si consideri il dato iniziale speciale corrispondente (nelle variabili originali) a $q(0) = \frac{\pi}{4}$, $\dot{q}(0) = \sqrt{2}$ e si determini esplicitamente la soluzione $q = q(t)$ corrispondente a tale dato iniziale.
- Si verifichi che la soluzione $q(t)$ trovata al punto precedente risolve le equazioni di Eulero-Lagrange per $\mathcal{L}(q, \dot{q})$. (lasciato per esercizio)

Esercizio 3
Sia $\mathcal{H}(q, p)$ la seguente hamiltoniana:

$$\mathcal{H}(q, p) = \sqrt{1 + p^2} - Eq \qquad E > 0.$$

1. Scrivere le equazioni di Hamilton corrispondenti.
2. Si risolvano le equazioni del moto con dati iniziali generici $(q(0), p(0)) = (q_0, p_0)$.
3. Si scriva l'equazione di Hamilton-Jacobi che mappi l'Hamiltoniana $\mathcal{H}(q, p)$ in $\tilde{\mathcal{H}}(Q, P) = P$.
4. Si verifichi che, se $P + Eq \geq 1$, la funzione $S(q, P) = \frac{1}{E} f(P + Eq)$ con

   $$f(x) = \frac{1}{2}[x\sqrt{x^2 - 1} - \log(x + \sqrt{x^2 - 1})]$$

   risolve l'equazione di Hamilton-Jacobi.

Soluzione: tratto da II scritto a.a. 2014/2015 Prof. Alessandro Giuliani, punti b), c), d) e).