Esercizio 1

Una sbarretta rigida AB, omogenea di massa m e lunghezza ℓ è vincolata ad appartenere a un piano verticale Oxy e l'estremo A è vincolato a muoversi su una circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = R^2$. Sull'estremo B della sbarra agisce una forza $\mathbf{F} := (2kxy, kx^2, 0)$, $k > 0$.

1. Riconoscere che **F** è conservativa e calcolare il potenziale associato a tale forza.
2. Usando come coordinate lagrangiane φ e ϑ, vedi figura 1, calcolare la Lagrangiana del sistema.
3. Riconoscere che $\varphi = 0$, $\vartheta = 0$ è una configurazione di equilibrio e discutere la stabilità di tale configurazione.

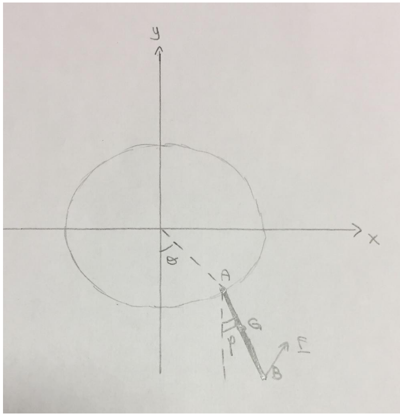

Figura 1

Soluzione:

1. Stiamo cercando una funzione $U_1(x, y, z)$ tale che

$$\begin{cases} \frac{\partial U_1}{\partial x} = -2kxy \\ \frac{\partial U_1}{\partial y} = -kx^2 \\ \frac{\partial U_1}{\partial z} = 0. \end{cases}$$

Svolgendo i calcoli si trova che $U_1(x, y, z) \equiv U(x, y) = -kx^2 y$.

2. Chiamiamo G il centro di massa del sistema: esso ha coordinate G$= (R \sin\vartheta + \frac{\ell}{2}\sin\varphi, -R\cos\vartheta - \frac{\ell}{2}\cos\varphi, 0)$. Quindi usando il Teorema di König, l'energia cinetica del sistema è

$$T = \frac{1}{2}m(R^2\dot{\vartheta}^2 + \frac{\ell^2}{3}\dot{\varphi}^2 + \ell R\dot{\varphi}\dot{\vartheta}\cos(\vartheta - \varphi)).$$

L'energia potenziale del sistema è la somma di due contributi: quello dovuto alla forza peso e quello dovuto alla forza **F** che agisce nel punto B$= (R\sin\vartheta + \ell\sin\varphi, -R\cos\vartheta - \ell\cos\varphi, 0)$. Pertanto l'energia potenziale totale è

$$U = -mg(R\cos\vartheta + \frac{\ell}{2}\cos\varphi) + k(R\sin\vartheta + \ell\sin\varphi)^2(R\cos\vartheta + \ell\cos\varphi).$$

La Lagrangiana è $\mathcal{L}(\vartheta, \varphi, \dot{\vartheta}, \dot{\varphi}) = T - U$.

3. Le posizioni di equilibrio sono tali che
$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial \vartheta} = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial \varphi} = 0 \end{cases}$$
cioè
$$mgR\sin\vartheta + 2k(R\sin\vartheta + \ell\sin\varphi)R\cos\vartheta(R\cos\vartheta + \ell\cos\varphi) - kR(R\sin\vartheta + \ell\sin\varphi)^2\sin\vartheta = 0$$
$$\frac{mg\ell}{2}\sin\varphi + 2k(R\sin\vartheta + \ell\sin\varphi)\ell\cos\varphi(R\cos\vartheta + \ell\cos\varphi) - k\ell(R\sin\vartheta + \ell\sin\varphi)^2\sin\varphi = 0$$
da cui si verifica facilmente che $\vartheta = \varphi = 0$ è soluzione.

4. La matrice Hessiana calcolata in $\vartheta = \varphi = 0$ è
$$\begin{pmatrix} mgR + 2kR^2(R+\ell) & 2k\ell R(R+\ell) \\ 2k\ell R(R+\ell) & \frac{mg\ell}{2} + 2k\ell^2(R+\ell) \end{pmatrix}$$
che è definita positiva. Per cui $\vartheta = \varphi = 0$ è una posizione di equilibrio stabile.

Esercizio 2 III Scritto a.a. 2014/2015 Prof. Alessandro Giuliani

Si consideri la Lagrangiana

$$\mathcal{L}(q,\dot{q}) = \frac{\dot{q}^2}{4q^2} - q\dot{q} - \log^2 q \qquad q > 0. \tag{1}$$

(a) Si scriva l'equazione di Eulero-Lagrange del sistema.

(b) Si determinino l'Hamiltoniana $\mathcal{H}(q,p)$ coniugata a $\mathcal{L}(q,\dot{q})$ e le equazioni di Hamilton corrispondenti.

(c) Per semplificare l'Hamiltoniana trovata, si usi una trasformazione di coordinate della forma

$$\begin{cases} Q = q^2 + qp \\ P = f(q) \end{cases} \qquad \text{con } f(1) = 0.$$

Per quale scelta di $f(q)$ tale trasformazione è canonica?

(d) Si identifichi una funzione generatrice di prima specie per la trasformazione canonica trovata al punto precedente.

(e) Usando la trasformazione canonica trovata ai punti precedenti, si determini l'Hamiltoniana $\tilde{\mathcal{H}}(Q,P)$ nelle nuove coordinate, si risolvano le equazioni di Hamilton corrispondenti e si riesprima la soluzione nelle variabili originali (q,p).

(f) Si verifichi esplicitamente che la soluzione $q(t)$ trovata risolve l'equazione di Eulero-Lagrange originale.