

### Esercizio 1

Si consideri il sistema meccanico unidimensionale di massa  $m = 1$  descritto dall'equazione

$$\ddot{x} = -V'(x)$$

con

$$V(x) = \frac{x^3}{x^2 - a}, \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

- Determinare un integrale primo del moto e verificare esplicitamente la conservazione.
- Calcolare al variare del parametro  $a$  i punti di equilibrio del sistema e discuterne la stabilità.
- Studiare il potenziale al variare del parametro  $a$ .
- Disegnare le curve di livello nel piano delle fasi  $(x, \dot{x})$  e discutere qualitativamente la natura del moto al variare dell'energia.
- Nel caso di moti periodici non banali, si scriva il periodo in termini di un integrale definito.

### Esercizio 2

Si consideri il sistema meccanico unidimensionale di massa  $m = 1$  descritto dall'equazione

$$\ddot{x} = -V'(x)$$

con

$$V(x) = e^x \left( \frac{1}{x} - \frac{\beta}{x^2} \right) \quad \beta > 1.$$

- Determinare un integrale primo del moto.
- Calcolare al variare del parametro  $\beta$  i punti di equilibrio del sistema e discuterne la stabilità.
- Studiare il potenziale al variare del parametro  $\beta$ .
- Disegnare le curve di livello nel piano delle fasi  $(x, \dot{x})$  e discutere qualitativamente la natura del moto al variare dell'energia.
- Nel caso di moti periodici non banali, si scriva il periodo in termini di un integrale definito.