TUTORATO 1 (5-03-2019)

Esercizio 1. Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari

$$\underline{\dot{x}} = A\underline{x}, \qquad \underline{x} \in \mathbb{R}^2, \qquad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Si calcolino gli autovalori e gli autovettori.
2. Si determini la natura del punto d'equilibrio.
3. Scrivere la soluzione generale del sistema (facoltativo).

(*) Si ricordi che se entrambi gli autovalori sono positivi (negativi) l'origine è detta *sorgente* (*pozzo*), se gli autovalori hanno segno discorde l'origine è un punto di sella.

Soluzione

1. Il polinomio caratteristico della matrice A è
$$(3-\lambda)(-1-\lambda) - 12 = \lambda^2 - 2\lambda - 15$$
quindi gli autovalori di A sono
$$\lambda_\pm = 1 \pm 4.$$
Gli autovettori di A sono le soluzioni del sistema
$$\begin{cases} 3u + 2v = \lambda_\pm u \\ 6u - v = \lambda_\pm v \end{cases}$$
quindi gli autovettori di A sono
$$\eta_\pm = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \mp 2 \end{pmatrix}$$
con $u \in \mathbb{R}$.
2. Siccome gli autovalori hanno segno discorde $\lambda_+ > 0 > \lambda_-$ l'origine è un punto di sella.
3. Abbiamo $A = PDP^{-1}$ dove
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$
quindi
$$P^{-1}\dot{\mathbf{x}} = DP^{-1}\mathbf{x}$$
quindi se $P^{-1}x = (y_1, y_2)$, allora
$$\begin{cases} \dot{y}_1 = 5y_1 \\ \dot{y}_2 = -3y_2 \end{cases}$$

e quindi

$$y_1(t) = e^{\lambda_+ t} y_1(0) = e^{5t} y_1(0), \qquad y_2(t) = e^{\lambda_- t} y_2(0) = e^{-3t} y_2(0)$$

quindi

$$P^{-1}\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_+ t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_- t} \end{pmatrix} P^{-1}\mathbf{x}(0)$$

dunque, usando

$$P^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -5 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

troviamo

$$\mathbf{x}(t) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} E_- + 2E_+ & E_- \\ 3E_- & -E_- + 2E_+ \end{pmatrix} \mathbf{x}(0)$$

dove

$$\begin{cases} E_+ := e^{\lambda_+ t} + e^{\lambda_- t} = 2e^t \cosh(4t) \\ E_- := e^{\lambda_+ t} - e^{\lambda_- t} = 2e^t \sinh(4t) \end{cases}$$

quindi

$$\begin{cases} x_1(t) = \dfrac{e^t}{2}((\sinh(4t) + 2\cosh(4t))x_1(0) + \sinh(4t)x_2(0)) \\ x_2(t) = \dfrac{e^t}{2}(3\sinh(4t)x_1(0) - (\sinh(4t) - 2\cosh(4t))x_2(0)) \end{cases}$$

Esercizio 2. Si consideri la forza posizionale $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$F(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1 \cos^2(ax_3) \\ x_2 \cos^2(ax_3) \\ -\frac{a}{2}(x_1^2 + x_2^2)\sin(2ax_3) \end{pmatrix}, \qquad a > 0,$$

1. Si verifichi che F è una forza conservativa.
2. Si determini l'energia potenziale corrispondente.

Soluzione

Si noti che $\mathbb{R}^3$ è uno spazio semplicemente connesso quindi la condizione necessaria perchè F sia conservativa (derivate in croce uguali a due a due) è anche una condizione sufficiente. Calcoliamo quindi le derivate incrociate:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial F_1}{\partial x_2} = 0 = \frac{\partial F_2}{\partial x_1} \\
&\frac{\partial F_1}{\partial x_3} = -2ax_1 \cos(ax_3)\sin(ax_3) = -ax_1 \sin(2ax_3) = \frac{\partial F_3}{\partial x_1} \\
&\frac{\partial F_2}{\partial x_3} = -2ax_2 \cos(ax_3)\sin(ax_3) = -ax_2 \sin(2ax_3) = \frac{\partial F_3}{\partial x_2}
\end{aligned}$$

Quindi **F** è conservativa. Determiniamo ora l'energia potenziale:

$$-\frac{\partial U}{\partial x_1} = F_1 \Rightarrow -\frac{\partial U}{\partial x_1} = -x_1 \cos^2(ax_3) \Rightarrow U(x_1, x_2, x_3) = -\frac{x_1^2}{2}\cos^2(ax_3) + c(x_2, x_3)$$

Dove $c(x_2, x_3)$ indica una funzione dipendente solo dalle variabili x_2 e x_3. Calcoliamoci esplicitamente $c(x_2, x_3)$:

$$\begin{aligned}
&-\frac{\partial U}{\partial x_2} = F_2 \Rightarrow -\frac{\partial U}{\partial x_2} = \frac{\partial c(x_2, x_3)}{\partial x_2} = -F_2 = -x_2 \cos^2(ax_3) \Rightarrow c(x_2, x_3) = -\frac{x_2^2}{2}\cos^2(ax_3) + b(x_3) \\
&\Rightarrow U(x_1, x_2, x_3) = -\frac{x_1^2}{2}\cos^2(ax_3) - \frac{x_2^2}{2}\cos^2(ax_3) + b(x_3)
\end{aligned}$$

dove $b(x_3)$ indica una funzione dipendente solo dalla variabile x_3. Calcoliamoci esplicitamente $b(x_3)$:

$$\begin{aligned}
&-\frac{\partial U}{\partial x_3} = F_3 \Rightarrow -\frac{\partial U}{\partial x_3} = -(x_1^2 + x_2^2)a\cos^2(ax_3)\sin(ax_3) + b'(x_3) = F_3 = -a\frac{(x_1^2 + x_2^2)}{2}\sin(2ax_3) \\
&\Rightarrow b'(x_3) = 0 \Rightarrow b(x_3) = cost \\
&\Rightarrow U(x_1, x_2, x_3) = -\frac{(x_1^2 + x_2^2)}{2}\cos^2(ax_3)
\end{aligned}$$

Esercizio 3. Si consideri l'equazione del moto per un punto materiale di massa $m = 1$ su $\mathbb{R}$,

$$\ddot{x} = -V'(x), \qquad V(x) = \frac{x^4}{4} + \alpha\frac{x^2}{2}$$

1. Si determino i punti di equilibrio al variare di $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
2. Si studi la stabilità dei punti di equilibrio (non degeneri).
3. Si determini l'energia del sistema.
4. Si verifichi che E è una costante del moto.

Soluzione

1. I punti di equilibrio del sistema sono i punti critici dell'energia potenziale, ossia gli x tali che

$$V'(x) = x^3 + \alpha x = x(x^2 + \alpha) = 0.$$

   - se $\alpha > 0$ abbiamo un unico punto di equilibrio: $x_0 = 0$.
   - se $\alpha < 0$ abbiamo tre punti di equilibrio: $x_1 = 0, x_{2,3} = \pm\sqrt{-\alpha}$ $(-\alpha > 0)$

2. La stabilità si determina calcolando la derivata seconda dell'energia potenziale nei punti di equilibrio

   - se $\alpha > 0$ il punto $x_0 = 0$ è un punto di equilibrio stabile, infatti

$$V''(x) = 3x^2 + \alpha\big|_{x_0=0} = \alpha > 0$$

     e quindi $x_0 = 0$ è un punto di minimo del potenziale.
   - se $\alpha < 0$
     (a) il punto $x_1 = 0$ è un punto di equilibrio instabile, infatti

$$V''(x) = 3x^2 + \alpha\big|_{x=0} = \alpha < 0$$

     e quindi $x_1 = 0$ è un punto di massimo del potenziale.
     (b) i punti $x_{2,3} = \pm\sqrt{-\alpha}$ sono due punti di equilibrio stabile, infatti

$$V''(x) = 3x^2 + \alpha\big|_{x=\sqrt{-\alpha}} = 3x^2 + \alpha\big|_{x=-\sqrt{-\alpha}} = -3\alpha + \alpha = -2\alpha < 0$$

     e quindi $x_{2,3} = \pm\sqrt{-\alpha}$ sono due punti di minimo del potenziale.

3. L'energia del sistema è

$$E := \frac{1}{2}\dot{x}^2 + V(x) = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{x^4}{4} + \alpha\frac{x^2}{2}$$

4. E è una costante del moto, infatti

$$\dot{E} = \dot{x}(\ddot{x} + x^3 + \alpha x) = \dot{x}(-V'(x) + x^3 + \alpha x) = \dot{x}(-x^3 - \alpha x + x^3 + \alpha x) = 0$$

Esercizio 4. Si consideri l'equazione del moto per un punto materiale di massa $m = 1$ su $\mathbb{R}$,

$$\ddot{x} = x^2 - x$$

1. Si determini una grandezza conservata del moto.
2. Si disegnino le curve di livello corrispondenti nel piano delle fasi.
3. Si identifichino i dati iniziali corrispondenti a moti periodici, a moti aperti e a moti chiusi aperiodici.

Soluzione

1. L'energia

$$E = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + V(x) := \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$$

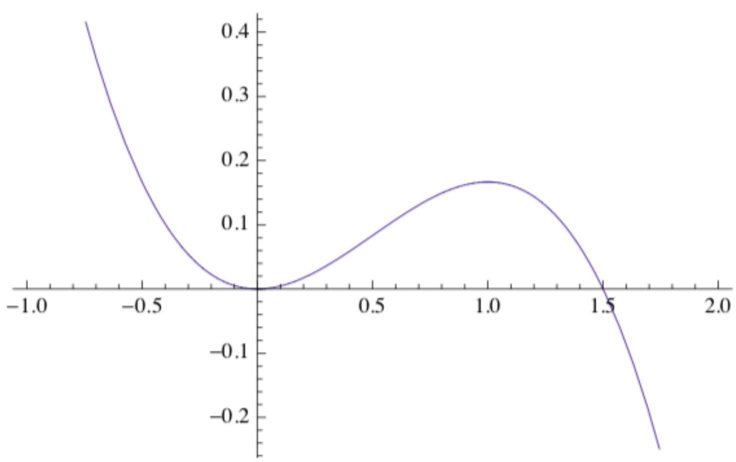
è conservata:

$$\dot{E} = \dot{x}(\ddot{x} + x - x^2) = 0$$

2. Le curve di livello per una energia E fissata sono determinate da

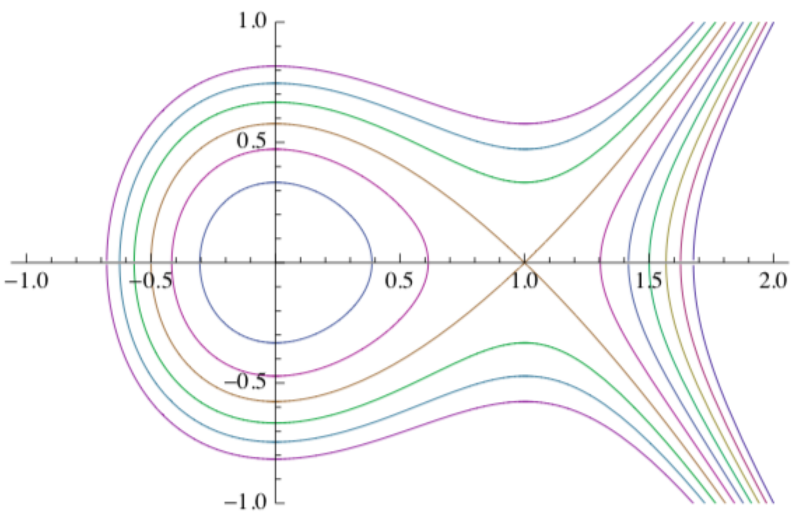
$$\dot{x}(x) = \pm\sqrt{2(E - V(x))} = \pm\sqrt{2(E - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3})}$$

Il grafico di $V(x)$ è:



$V(x)$ ha un minimo in 0 e un massimo in 1, e $V(0) = 0$, $V(1) = 1/6$, $lim_{x\to\pm\infty} V(x) = \pm\infty$; inoltre V decresce in $(-\infty, 0)$, cresce in $(0, 1)$ e decresce in $(1, \infty)$. Quindi

- se $E < 0$, $\dot{x}(x)$ è definito per $x \geq x_E$ dove x_E è l'unica soluzione di $V(x_E) = E$, e $\dot{x}(x_E) = 0$, e
$$\frac{d}{dx}\dot{x}\Bigg\|_{x=x_E+\epsilon} = -\frac{V'(x_E+\epsilon)}{2\sqrt{2(E - V(x_E+\epsilon))}}$$
con $V'(x_E) \neq 0$ quindi $\dot{x}'(x_E) = \pm\infty$ (dove il $'$ significa una derivata rispetto a x). Inoltre $\dot{x} \to \pm\infty$ quando $x \to \infty$, e $\dot{x}(x) \sim x^{3/2}$ all'infinito.
- se $0 < E < 1/6$, $\dot{x}(x)$ è definito per $x \in [x_E^{(-)}, x_E^{(+)}]$ e per $x \geq x_E$ dove $x^{(\pm)}$ e x_E sono le tre soluzioni di $V(x^{(\pm)}) = E$. Abbiamo $\dot{x}'(x^{(\pm)}) = \pm\infty$, $\dot{x}'(x_E) = \pm\infty$. Inoltre $\dot{x} \to \infty$ quando $x \to \infty$, e $\dot{x}(x) \sim x^{3/2}$ all'infinito.
- se $E > 1/6$, $\dot{x}(x)$ è definito per $x \geq x_E$ dove x_E è l'unica soluzione di $V(x_E) = E$, e $\dot{x}'(x_E) = \pm\infty$. Inoltre $\dot{x}(x) \sim x^{3/2}$ quando $x \to \infty$.
- se $E = 0$, $\dot{x}(x)$ è definito per $x = 0$, nel qual caso $\dot{x}(x) = \dot{x}(0) = 0$, e per $x \geq x_0$ dove x_0 è la seconda soluzione $V(x_0) = 0$, nel qual caso la traiettoria ha le stesse proprietà qualitative di quelle aperte a energia negativa.
- se $E = 1/6$, $\dot{x}(x)$ è definito per $x \in [x_E^{(-)}, 1]$ e per $x \in [1, \infty)$ dove $x_E^{(-)}$ è la prima delle due soluzioni di $V(x_E^{(-)}) = E$, $\dot{x}'(x_E^{(-)}) = \pm\infty$ e $\dot{x}'(1) = \pm 1$. Inoltre $\dot{x}(x) \sim x^{3/2}$ quando $x \to \infty$. Le curve di livello avranno la forma di quelle disegnate nel seguente grafico



3.
- se $x(0) \geq x_E$ dove x_E è la più grande delle soluzioni di $V(x_E) = E$, e $E \neq 1/6$, allora il moto è aperto.
- se $0 < E < 1/6$ e $x(0) \in [x_E^{(-)}, x_E^{(+)}]$ dove $x_E^{(\pm)}$ sono le due soluzioni piè piccole di $V(x_E^{(\pm)}) = E$, allora $V'(x_E^{(\pm)}) \neq 0$ quindi il moto è chiuso e periodico.

- se $E = 0$ e $x(0) = 0$, il moto è costante, quindi chiuso e periodico.
- se $E = 1/6$ e $x(0) > 1$, allora il moto è aperto.
- se $E = 1/6$ e $x(0) < 1$, allora il moto è chiuso, e come $V'(1) = 0$, sarà aperiodico.

Esercizio 5. Un punto materiale di massa $m = 1$ si muove sulla retta $\mathbb{R}$ sotto l'effetto di una forza conservativa di energia potenziale:

$$V(x) = x + 2\sin x$$

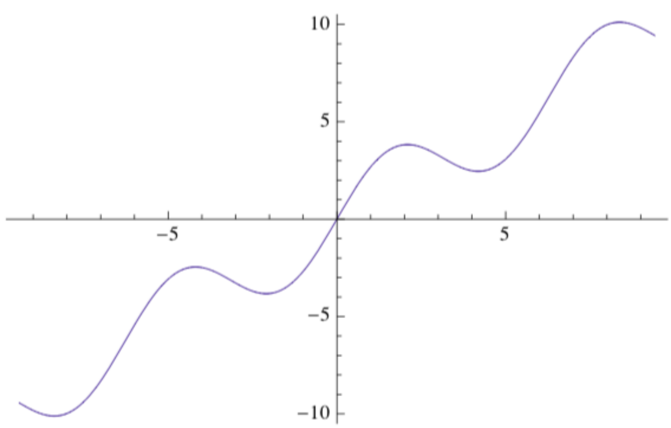
1. Scrivere l'equazione del moto.
2. Si determini una grandezza conservata del moto.
3. Si disegni il grafico dell'energia potenziale.
4. Si determinino i punti di equilibrio del sistema.
5. Si disegnino le curve di livello corrispondenti nel piano delle fasi.
6. Si identifichino i dati iniziali corrispondenti a moti periodici, a moti aperti e a moti chiusi aperiodici.

Soluzione

1. L'equazione del moto è
$$\ddot{x} = -V'(x) = -2\cos x$$

2. L'energia
$$E = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + V(x)$$
è una grandezza conservata (un integrale primo del moto):
$$\dot{E} = \dot{x}(\ddot{x} + 1 + 2\cos x) = 0$$

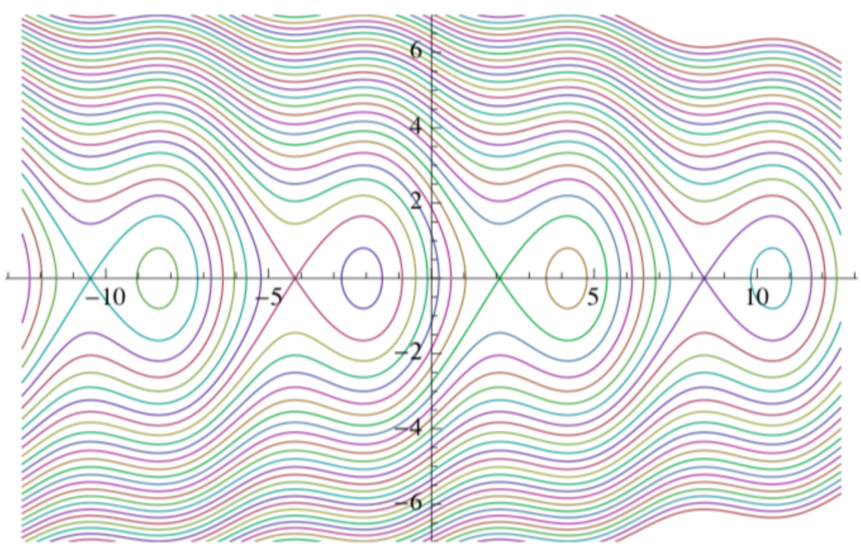
3. Il grafico dell'energia potenziale:



4. I punti di equilibrio del sistema sono i punti critici dell'energia potenziale (ossia gli x tali che $U'(x) = 0$) sono
$$a_k := \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, b_k := -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$
con $k \in \mathbb{Z}$. Gli a_k son massimi e i b_k sono minimi. Inoltre abbiamo
$$V(a_k) = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi + \sqrt{3}, \qquad V(b_k) = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi - \sqrt{3}$$
quindi $V(b_{k+1}) > V(b_{k-1})$ (perchè $\frac{4\pi}{3} > 4 > 2 > \sqrt{3}$).

5. Le curve di livello per una energia E fissata sono determinate da
$$\dot{x}(x) = \pm\sqrt{2(E - V(x)} = \pm\sqrt{2(E - x - 2\sin x}.$$
   - Se $E \in (V(b_{k+1}), V(a_k))$, $V(x) = E$ ha 3 soluzioni: $x_E < x_E^{(-)} < x_E^{(+)}$, e $\dot{x}(x)$ è definito per $x \leq x_E$ e per $x \in [x_E^{(-)}, x_E^{(+)}]$. Come $V'(x_E^{(\pm)}) \neq 0$ e $V'(x_E) \neq 0$, $\dot{x}'(x_E^{(\pm)}) = \pm\infty$ e $\dot{x}'(x_E) = \pm\infty$. Inoltre $\dot{x}(x) \sim \pm x$ per $x \to -\infty$.
   - Se $E \in (V(a_{k-1}), V(b_{k+1}))$, $V(x) = E$ ha una soluzione: x_E,e $\dot{x}(x)$ è definito per $x \leq x_E$, e $\dot{x}'(x_E) = \pm\infty$. Inoltre $\dot{x}(x) \sim \pm x$ per $x \to -\infty$.
   - Se $E = V(b_k)$, $\dot{x}(x)$ è definito per $x = b_k$ e per $x \leq x_E$ dove x_E è la soluzione di $V(x_E) = E$ diversada b_k, $\dot{x}(b_k) = 0$, $\dot{x}'(x_E) = \pm\infty$ e $\dot{x}(x) \sim \pm x$ per $x \to -\infty$.
   - Se $E = V(a_k)$, $V(x) = E$ ha due soluzioni: $a_k < x_E$, e $\dot{x}(x)$ è definito per $x \leq a_k$ e per $x \in [a_k, x_E]$, e $\dot{x}'(x_E) = \pm\infty$, $\dot{x}'(a_k) = \pm 3^{1/4}/2$. Inoltre $\dot{x}(x) \sim \pm x$ per $x \to -\infty$.

   Le curve di livello avranno la forma di quelle disegnate:



6. Usando il ragionamento della domanda precedente, troviamo che

- se $x(0) \leq x_E$ dove x_E è la più piccola delle soluzioni di $V(x_E) = E$ e se $E \neq V(a_k)$ allora il moto non è limitato.
- se $E \in (V(b_{k+1}), V(a_k))$ e $x(0) \in (b_{k+1}, a_k)$ allora il moto è limitato e periodico.
- se $E = V(b_k)$ e $x(0) = b_k$ allora il moto è costante.
- se $E = V(a_k)$ e $x(0) > a_k$ allora il moto è limitato e aperiodico.