

Esercizio 1. Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari

$$\dot{\underline{x}} = A\underline{x}, \quad \underline{x} \in \mathbb{R}^2, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Si calcolino gli autovalori e gli autovettori.
2. Si determini la natura del punto d'equilibrio.
3. Scrivere la soluzione generale del sistema (facoltativo).

(*) Si ricordi che se entrambi gli autovalori sono positivi (negativi) l'origine è detta *sorgente* (*pozzo*), se gli autovalori hanno segno discorde l'origine è un punto di sella.

Esercizio 2. Si consideri la forza posizionale $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$F(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1 \cos^2(ax_3) \\ x_2 \cos^2(ax_3) \\ -\frac{a}{2}(x_1^2 + x_2^2) \sin(2ax_3) \end{pmatrix}, \quad a > 0,$$

1. Si verifichi che F è una forza conservativa.
2. Si determini l'energia potenziale corrispondente.

Esercizio 3. Si consideri l'equazione del moto per un punto materiale di massa $m = 1$ su \mathbb{R} ,

$$\ddot{x} = -V'(x), \quad V(x) = \frac{x^4}{4} + \alpha \frac{x^2}{2}$$

1. Si determinino i punti di equilibrio al variare di $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
2. Si studi la stabilità dei punti di equilibrio (non degeneri).
3. Si determini l'energia del sistema.
4. Si verifichi che E è una costante del moto.

Esercizio 4. Si consideri l'equazione del moto per un punto materiale di massa $m = 1$ su \mathbb{R} ,

$$\ddot{x} = x^2 - x$$

1. Si determini una grandezza conservata del moto.
2. Si disegnino le curve di livello corrispondenti nel piano delle fasi.
3. Si identifichino i dati iniziali corrispondenti a moti periodici, a moti aperti e a moti chiusi aperiodici.

Esercizio 5. Un punto materiale di massa $m = 1$ si muove sulla retta \mathbb{R} sotto l'effetto di una forza conservativa di energia potenziale:

$$V(x) = x + 2 \sin x$$

1. Scrivere l'equazione del moto.
2. Si determini una grandezza conservata del moto.
3. Si disegni il grafico dell'energia potenziale.
4. Si determinino i punti di equilibrio del sistema.
5. Si disegnino le curve di livello corrispondenti nel piano delle fasi.
6. Si identifichino i dati iniziali corrispondenti a moti periodici, a moti aperti e a moti chiusi aperiodici.