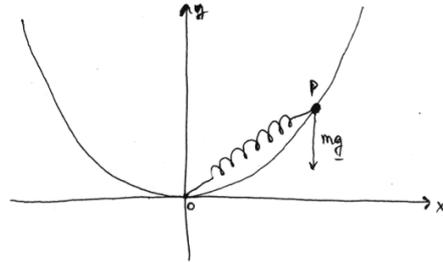


## Tutorato 5 - MA/FM210 - 24/04/2018

**ESERCIZIO 1.** Si consideri il sistema lagrangiano costituito da un punto materiale di massa  $m$ , vincolato a muoversi in un piano verticale  $(x, y)$ , lungo il profilo di equazione  $y = x^2/\ell_0$ . Il punto è sottoposto alla forza di gravità ed è collegato all'estremo di una molla di costante elastica  $k > 0$ .



- Si scriva la lagrangiana del sistema nelle coordinate adattate al vincolo.
- Si derivino le equazioni del moto sul vincolo.
- Si identifichi una grandezza conservata.
- Si risolva il moto per quadrature.

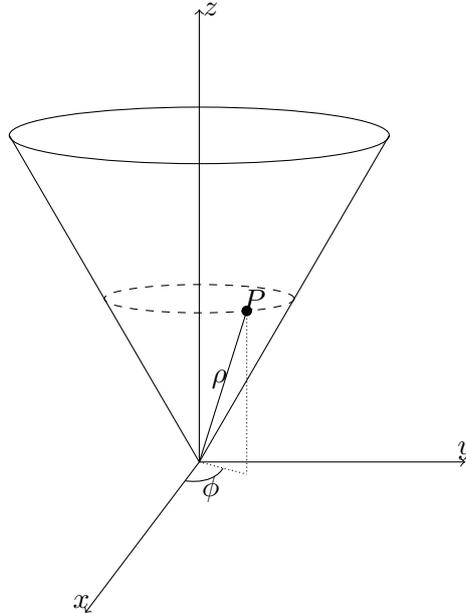
**SOLUZIONE** Si veda la soluzione dell'esercizio 1 del tutorato 6 del corso di FM210, A.A.2013/14, disponibile al link:  
[http://www.mat.uniroma3.it/users/giuliani/public\\_html/didattica/FM210\\_2013/tut6sol.pdf](http://www.mat.uniroma3.it/users/giuliani/public_html/didattica/FM210_2013/tut6sol.pdf)

**ESERCIZIO 2.** Una particella di massa  $m$  e di carica  $q$  è vincolata a muoversi su una guida liscia di equazione  $y = A \sin \omega x$ . La particella è soggetta alla forza peso  $\mathbf{F}_g = (0, -mg)$  e al campo elettrico  $\mathbf{E} = (E_0 \cos \omega x, 0)$ .

- Si determini l'energia potenziale associata alla forza attiva conservativa totale che agisce sulla particella.
- Si scriva la Lagrangiana del sistema.
- Si ricavino le equazioni di Eulero-Lagrange.
- Si studi qualitativamente il moto (in particolare, si identifichino i punti di equilibrio, se ne studi la stabilità e si disegnino le traiettorie del sistema nell'opportuno piano delle fasi) e lo si risolva per quadrature.

**SOLUZIONE** Si veda la soluzione dell'esercizio 2 del tutorato 7 del corso di FM210, A.A.2013/14, disponibile al link:  
[http://www.mat.uniroma3.it/users/giuliani/public\\_html/didattica/FM210\\_2013/tut7sol.pdf](http://www.mat.uniroma3.it/users/giuliani/public_html/didattica/FM210_2013/tut7sol.pdf)

**ESERCIZIO 3.** Una massa puntiforme  $m$  è vincolata a muoversi sotto l'effetto della forza peso sulla superficie di un cono di semiampiezza al vertice  $\theta_0 \in (0, \pi/2)$ , con asse in direzione verticale e vertice rivolto verso il basso, come in figura.



1. Si parametrizzi la superficie del vincolo usando coordinate sferiche centrate nel vertice del cono: in altre parole, si scelgano come coordinate parametriche la distanza  $\rho > 0$  dal vertice del cono, e l'angolo azimutale  $\phi$ , come in figura.
2. Si scriva la Lagrangiana  $\mathcal{L}$  del sistema, usando come coordinate Lagrangiane le variabili  $(\rho, \phi, \dot{\rho}, \dot{\phi})$ . Si riconosca che  $\phi$  è una variabile ciclica.
3. Si ricavino le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange. Si riconosca che tale sistema di equazioni ammette due grandezze conservate: l'energia meccanica  $E$  e il momento coniugato alla variabile ciclica  $\phi$ , che chiameremo  $A$ .
4. Usando la conservazione di  $A$ , si elimini la dipendenza di  $\dot{\phi}$  nell'espressione di  $E$ , e si esprima così l'energia meccanica del sistema in funzione di  $\rho, \dot{\rho}$  e di  $A$  nella forma  $E = m\dot{\rho}^2/2 + V_{eff}(\rho)$ : qual è l'espressione del potenziale efficace  $V_{eff}(\rho)$ ?
5. Si studi il grafico di  $V_{eff}$  e si discuta la natura qualitativa del moto radiale.
6. Si discutano le condizioni per cui il moto complessivo è periodico e se ne calcoli il periodo in termini di un integrale definito.

**SOLUZIONE** Si veda la soluzione dell'esercizio 4 del primo scritto del corso di FM210, A.A.2013/14, disponibile al link:  
[http://www.mat.uniroma3.it/users/giuliani/public\\_html/didattica/FM210\\_2013/primo\\_scritto-sol.pdf](http://www.mat.uniroma3.it/users/giuliani/public_html/didattica/FM210_2013/primo_scritto-sol.pdf)

**ESERCIZIO 4.** Si consideri un punto materiale di massa  $m$  vincolato a muoversi su una superficie ellissoidale di equazione

$$2(x^2 + y^2) + z^2 = R^2,$$

sottoposto all'azione della gravità e collegato agli estremi dell'ellissoide  $(0, 0, \pm R)$  tramite due molle di costante elastica  $k$ .

1. Si parametrizzi l'ellissoide usando coordinate cilindriche, i.e., nella forma  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \rho(z) \cos \theta \\ \rho(z) \sin \theta \\ z \end{pmatrix}$

con  $\rho(z) = \sqrt{\frac{R^2 - z^2}{2}}$ ,  $z \in [-R, R]$  e  $\theta \in [0, 2\pi)$ . Si scriva quindi la Lagrangiana del sistema in termini delle coordinate  $(z, \theta)$  e delle loro derivate.

2. Si scrivano le equazioni di Eulero-Lagrange corrispondenti.
3. Si riconosca che il sistema ammette una coordinata ciclica e si identifichi il momento conservato corrispondente (si chiami  $A$  il suo valore). Usando la legge di conservazione di tale momento, si esprima  $\dot{\theta}$  in termini di  $A, z, \dot{z}$ .
4. Si scriva l'espressione dell'energia meccanica  $E$  del sistema. Si sostituisca l'espressione di  $\dot{\theta}$  in termini di  $A, z, \dot{z}$  ricavata al punto precedente in quella dell'energia meccanica, e si esprima quest'ultima in termini di  $A$  e delle sole variabili  $(z, \dot{z})$ . Si identifichi quindi il potenziale efficace  $V_{eff}(z)$ .
5. Si determini l'equazione delle curve di livello nel piano  $(z, \dot{z})$  e se ne disegni il grafico, per  $A > 0$  fissato, al variare dell'energia  $E$ . Si discuta la natura qualitativa del moto della variabile  $z$ .
6. Si determinino le condizioni sui dati iniziali affinché il moto *complessivo* del sistema sia periodico e se ne calcoli il periodo in termini di un integrale definito. Esistono dati iniziali per cui il moto complessivo non è periodico? Se sì, qual è la natura di tali moti non periodici?

**SOLUZIONE** Si veda la soluzione al seguente link:

[http://www.mat.uniroma3.it/users/giuliani/public\\_html/didattica/MA\\_2015/soluzioni\\_terzo\\_scritto\\_7-9-2015\\_v2.pdf](http://www.mat.uniroma3.it/users/giuliani/public_html/didattica/MA_2015/soluzioni_terzo_scritto_7-9-2015_v2.pdf)

ESERCIZIO 5. Una massa puntiforme  $m$  è vincolata a muoversi sotto l'effetto della forza peso sulla superficie di un paraboloide di equazione cartesiana  $z = (x^2 + y^2)/\ell$ , dove  $\ell$  è una costante positiva.

1. Si parametrizzi la superficie del vincolo usando coordinate polari sul piano orizzontale, i.e., usando coordinate  $\rho, \theta$  tali che  $x = \rho \cos(\theta)$  e  $y = \rho \sin(\theta)$ .
2. Si scriva la Lagrangiana del sistema, usando come coordinate Lagrangiane le variabili  $(\rho, \theta, \dot{\rho}, \dot{\theta})$ . Si riconosca che  $\theta$  è una variabile ciclica (i.e.,  $\mathcal{L}$  è indipendente da  $\theta$ ).
3. Si ricavino le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange. Si riconosca che tale sistema di equazioni ammette due grandezze conservate: l'energia meccanica  $E$  e un secondo integrale primo,  $A = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}$ , associato alla variabile ciclica.
4. Usando la conservazione di  $A$ , si elimini la dipendenza di  $\dot{\theta}$  nell'espressione di  $E$ , e si esprima così l'energia meccanica del sistema in funzione di  $\rho, \dot{\rho}$  e di  $A$  nella forma  $E = (m/2) \dot{\rho}^2 F(\rho) + V_{eff}(\rho)$ , dove  $F(\rho) > 0$ : qual è l'espressione del potenziale efficace  $V_{eff}(\rho)$ ?
5. Si studi il grafico di  $V_{eff}$  e si discuta la natura qualitativa del moto radiale.
6. Si risolva il moto per quadrature. Si discutano le condizioni per cui il moto complessivo è periodico e se ne calcoli il periodo in termini di un integrale definito.

**SOLUZIONE** Si veda la soluzione dell'esercizio 4 dello scritto del 7-2-2014 del corso di FM210 A.A.2013/14, disponibile al link:

[http://www.mat.uniroma3.it/users/giuliani/public\\_html/didattica/FM210\\_2013/secondo\\_scritto-sol-bis.pdf](http://www.mat.uniroma3.it/users/giuliani/public_html/didattica/FM210_2013/secondo_scritto-sol-bis.pdf)