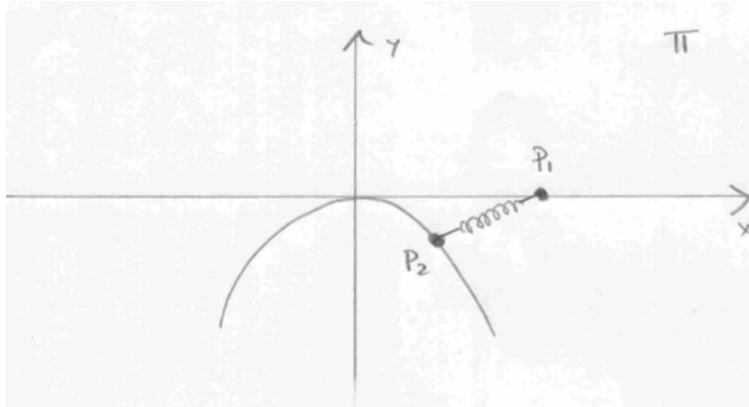


**Esercizio 1.** Un sistema meccanico pesante, appartenente ad un piano verticale  $\pi$ , è costituito da due punti materiali  $P_1$  e  $P_2$  di masse rispettivamente  $m_1$  e  $m_2$ . Il punto  $P_1$  è vincolato ad una retta orizzontale  $x$  del piano  $\pi$  ed il punto  $P_2$  è vincolato ad una parabola di equazione  $y = -ax^2$  con  $a > 0$  (vedi figura). I due punti sono collegati da una molla ideale di costante  $K > 0$  e lunghezza a riposo nulla.

1. Si scrivano la lagrangiana del sistema e le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange..
2. Si determinino i punti di equilibrio studiandone la stabilità al variare dei parametri.
3. Se il punto  $P_1$  è fissato nell'origine  $O$  determinare i dati iniziali a cui fa seguito un moto periodico.



**SOLUZIONE** Si veda la soluzione dell'esercizio (punti 1, 2 e 4) del tutorato del corso di FM210, A.A.2014/15, disponibile al link: [http://www.mat.uniroma3.it/users/betta/FM210/mas\\_sol\\_18\\_9\\_08\\_FM210.pdf](http://www.mat.uniroma3.it/users/betta/FM210/mas_sol_18_9_08_FM210.pdf)

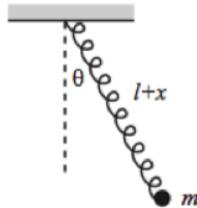
**Esercizio 2.** Scrivere le equazioni di Eulero-Lagrange per il sistema bidimensionale di lagrangiana

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = q_2 \dot{q}_1 - q_1 \dot{q}_2 - 2q_1 q_2$$

e trovarne esplicitamente la soluzione.

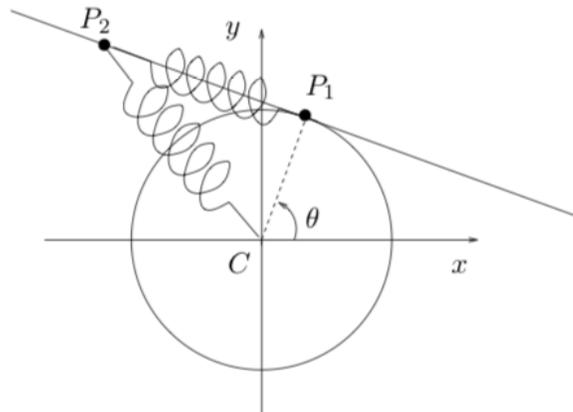
**SOLUZIONE** Si veda la soluzione dell'esercizio 1 del tutorato 4 del corso di FM210, A.A.2017/18, disponibile al link: [http://www.mat.uniroma3.it/users/giuliani/public\\_html/didattica/MA\\_2018/Soluzioni\\_tutorato4.pdf](http://www.mat.uniroma3.it/users/giuliani/public_html/didattica/MA_2018/Soluzioni_tutorato4.pdf)

**Esercizio 3.** Si consideri un pendolo costituito da una molla di lunghezza di riposo  $\ell$  sospesa a un punto di sospensione  $O$ , al cui estremo libero è appesa una massa  $m$  (vedi figura). Si scriva la lagrangiana del sistema usando le coordinate  $x$  e  $\theta$ , dove  $\ell + x$  è la lunghezza della molla e  $\theta$  l'angolo formato con la verticale verso il basso, come in figura. Si determinino le equazioni di Eulero-Lagrange corrispondenti.



**SOLUZIONE** Si veda la soluzione dell'esercizio 2 del tutorato 4 del corso di FM210, A.A.2017/18, disponibile al link: [http://www.mat.uniroma3.it/users/giuliani/public\\_html/didattica/MA\\_2018/Soluzioni\\_tutorato4.pdf](http://www.mat.uniroma3.it/users/giuliani/public_html/didattica/MA_2018/Soluzioni_tutorato4.pdf)

**Esercizio 4.** Si consideri il sistema lagrangiano costituito da due punti materiali  $P_1$  e  $P_2$ , di massa rispettivamente  $m_1$  e  $m_2$ , vincolati a muoversi in un piano verticale nel modo seguente. Il punto  $P_1$  si muove lungo una circonferenza  $C$  di raggio  $R = 1$ , e il punto  $P_2$  si muove lungo una guida rettilinea infinita di massa nulla tangente alla circonferenza  $C$  in  $P_1$ . Il punto  $P_2$  è collegato al punto  $P_1$  e al centro  $C$  della circonferenza da due molle, entrambe di costante elastica  $k > 0$  e lunghezza a riposo nulla. Il sistema è sottoposto all'azione della gravità; sia  $g$  l'accelerazione di gravità (vedi figura).



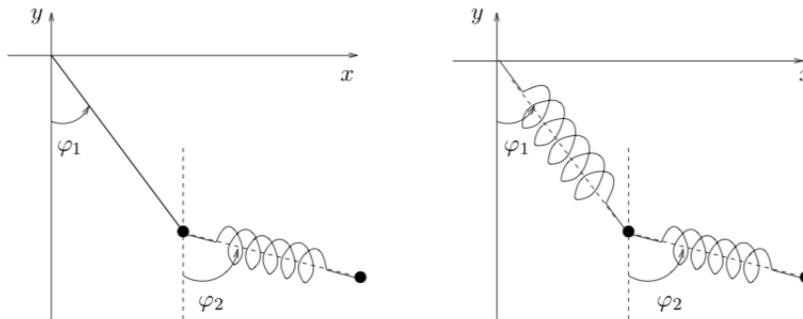
1. Quanti gradi di libertà ha il sistema?
2. Si scrivano la lagrangiana del sistema e le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange.

3. Si determinino le configurazioni di equilibrio nel sistema nel caso in cui sia  $m_1 = 0$  e  $m_2 = 1$ , e se ne studi la stabilità; si discuta il comportamento asintotico nei limiti  $k \rightarrow 0$  e  $k \rightarrow +\infty$ .
4. Si determinino le configurazioni di equilibrio nel sistema nel caso in cui  $m_1 = m_2 = 1$ , e se ne discuta la stabilità.

**SOLUZIONE** Si veda la soluzione dell'esercizio 30 disponibile al link: <http://www.mat.uniroma3.it/users/gentile/2018-2019/FM210/testo/volume2-105-130.pdf>

**Esercizio 5.** Si consideri un sistema costituito da un pendolo doppio, ossia costituito da due pendoli semplici coplanari, di massa rispettivamente  $m_1$  e  $m_2$ , dei quali il primo ha il punto di sospensione fisso e il secondo è sospeso al punto di massa  $m_1$ , nei seguenti casi:

1. il pendolo di massa  $m_1$  e lunghezza  $\ell_1$  è collegato a un punto fisso, il punto di massa  $m_2$  è collegato al punto di massa  $m_1$  tramite una molla di costante elastica  $k > 0$  e di lunghezza a riposo trascurabile (vedi figura);
2. il punto di massa  $m_1$  e il punto di massa  $m_2$  sono collegati a un punto fisso e al punto di massa  $m_1$ , rispettivamente, tramite due molle di costante elastica  $k > 0$  e di lunghezza a riposo trascurabile (vedi figura).



Il sistema è sottoposto all'azione della gravità; sia  $g$  l'accelerazione di gravità.

1. Si scrivano le lagrangiane e le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange dei due sistemi.
2. Per ciascun sistema, si determinino le configurazioni di equilibrio e se ne discuta la stabilità.

**SOLUZIONE** Si veda la soluzione dell'esercizio 34 (caso 1 e caso 2) disponibile al link: <http://www.mat.uniroma3.it/users/gentile/2018-2019/FM210/testo/volume2-105-130.pdf>