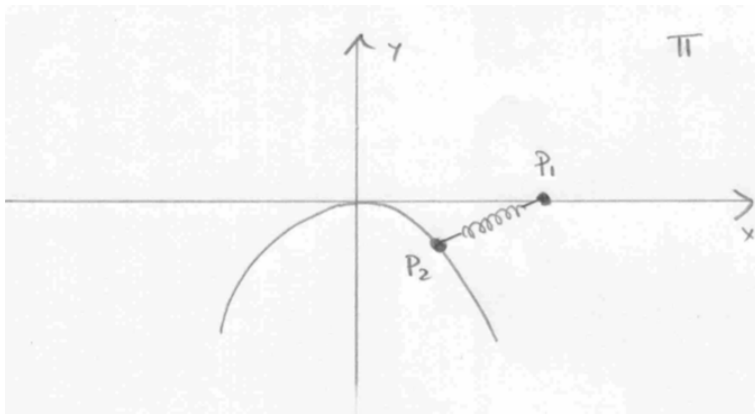


TUTORATO 6 (7-05-2019)

Esercizio 1. Un sistema meccanico pesante, appartenente ad un piano verticale π , è costituito da due punti materiali P_1 e P_2 di masse rispettivamente m_1 e m_2 . Il punto P_1 è vincolato ad una retta orizzontale x del piano π ed il punto P_2 è vincolato ad una parabola di equazione $y = -ax^2$ con $a > 0$ (vedi figura). I due punti sono collegati da una molla ideale di costante $K > 0$ e lunghezza a riposo nulla.

1. Si scrivano la lagrangiana del sistema e le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange..
2. Si determinino i punti di equilibrio studiandone la stabilità al variare dei parametri.
3. Se il punto P_1 è fissato nell'origine O determinare i dati iniziali a cui fa seguito un moto periodico.

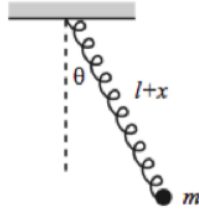


Esercizio 2. Scrivere le equazioni di Eulero-Lagrange per il sistema bidimensionale di lagrangiana

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = q_2 \dot{q}_1 - q_1 \dot{q}_2 - 2q_1 q_2$$

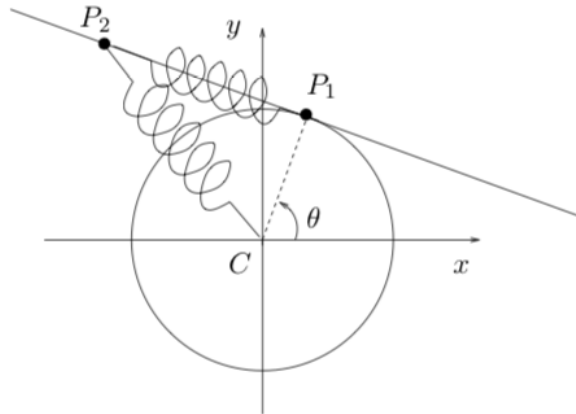
e trovarne esplicitamente la soluzione.

Esercizio 3. Si consideri un pendolo costituito da una molla di lunghezza di riposo ℓ sospesa a un punto di sospensione O , al cui estremo libero è appesa una massa m (vedi figura).



Si scriva la lagrangiana del sistema usando le coordinate x e θ , dove $\ell + x$ è la lunghezza della molla e θ l'angolo formato con la verticale verso il basso, come in figura. Si determinino le equazioni di Eulero-Lagrange corrispondenti.

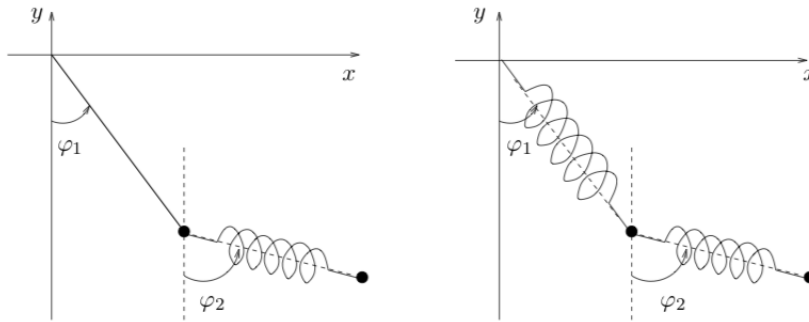
Esercizio 4. Si consideri il sistema lagrangiano costituito da due punti materiali P_1 e P_2 , di massa rispettivamente m_1 e m_2 , vincolati a muoversi in un piano verticale nel modo seguente. Il punto P_1 si muove lungo una circonferenza C di raggio $R = 1$, e il punto P_2 si muove lungo una guida rettilinea infinita di massa nulla tangente alla circonferenza C in P_1 . Il punto P_2 è collegato al punto P_1 e al centro C della circonferenza da due molle, entrambe di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla. Il sistema è sottoposto all'azione della gravità; sia g l'accelerazione di gravità (vedi figura).



1. Quanti gradi di libertà ha il sistema?
2. Si scrivano la lagrangiana del sistema e le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange.
3. Si determinino le configurazioni di equilibrio nel sistema nel caso in cui sia $m_1 = 0$ e $m_2 = 1$, e se ne studi la stabilità; si discuta il comportamento asintotico nei limiti $k \rightarrow 0$ e $k \rightarrow +\infty$.
4. Si determinino le configurazioni di equilibrio nel sistema nel caso in cui $m_1 = m_2 = 1$, e se ne discuta la stabilità.

Esercizio 5. Si consideri un sistema costituito da un pendolo doppio, ossia costituito da due pendoli semplici coplanari, di massa rispettivamente m_1 e m_2 , dei quali il primo ha il punto di sospensione fisso e il secondo è sospeso al punto di massa m_1 , nei seguenti casi:

1. il pendolo di massa m_1 e lunghezza ℓ_1 è collegato a un punto fisso, il punto di massa m_2 è collegato al punto di massa m_1 tramite una molla di costante elastica $k > 0$ e di lunghezza a riposo trascurabile (vedi figura);
2. il punto di massa m_1 e il punto di massa m_2 sono collegati a un punto fisso e al punto di massa m_1 , rispettivamente, tramite due molle di costante elastica $k > 0$ e di lunghezza a riposo trascurabile (vedi figura).



Il sistema è sottoposto all'azione della gravità; sia g l'accelerazione di gravità.

1. Si scrivano le lagrangiane e le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange dei due sistemi.
2. Per ciascun sistema, si determinino le configurazioni di equilibrio e se ne discuta la stabilità.