

Tutorato 8 - MA/FM210 - 12/5/2017

ESERCIZIO 1. Si calcolino i momenti principali di inerzia dei seguenti corpi rigidi rispetto al loro centro di massa:

1. Disco sottile omogeneo di massa M e raggio R [Risposta: $I_1 = I_2 = \frac{1}{4}MR^2$, $I_3 = \frac{1}{2}MR^2$].
2. Lamina quadrata sottile omogenea di lato ℓ e massa M [Risposta: $I_1 = I_2 = \frac{1}{12}M\ell^2$, $I_3 = \frac{1}{6}M\ell^2$].
3. Cilindro circolare retto omogeneo di massa M , raggio R e altezza h [Risposta: $I_1 = I_2 = \frac{1}{12}M(3R^2 + h^2)$, $I_3 = \frac{1}{2}MR^2$].
4. Sfera omogenea di massa M e raggio R [Risposta: $I_1 = I_2 = I_3 = \frac{2}{5}MR^2$].

SOLUZIONE. Si veda la soluzione all'esercizio 1 del tutorato 11 del corso di FM210, A.A.2013/14, disponibile al link:

http://www.mat.uniroma3.it/users/giuliani/public_html/didattica/FM210_2013/tut11sol.pdf

ESERCIZIO 2. Si dimostri il seguente teorema (Huygens-Steiner): Sia dato un corpo rigido con centro di massa G e distribuzione di massa $\{\mathbf{q}_i, m_i\}$. Assegnate due rette parallele r_0 ed r_1 in direzione $\hat{\xi}$ e passanti la prima per G e la seconda per un punto P , vale la seguente identità:

$$I(r_1) = I(r_0) + Md^2$$

dove $I(r_i) = \sum_i m_i \text{dist}^2(\mathbf{q}_i, r_i)$ è il momento di inerzia del corpo rigido rispetto alla retta r_i , e d è la distanza tra r_0 ed r_1 .

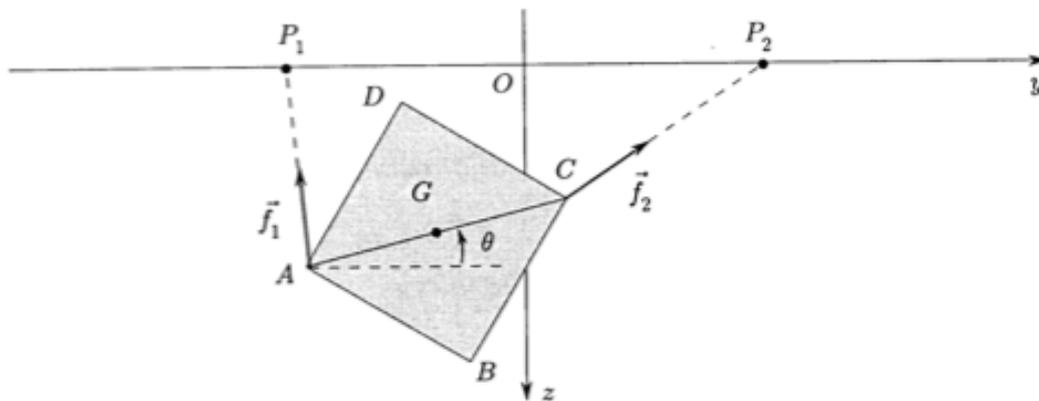
SOLUZIONE. Si vedano le dispense del Prof. G. Gentile, Capitolo 10, paragrafo 42.26.

ESERCIZIO 3. Un cilindro circolare retto omogeneo di massa M , raggio R e altezza h rotola senza strisciare su un piano orizzontale, in modo tale che il suo centro di massa G ha coordinate $(x(t), 0, R)$ ad ogni istante di tempo. Il centro di massa G è collegato da una molla di costante elastica k e centro $(0, 0, R)$. Si scriva la Lagrangiana del sistema (usando x come coordinata lagrangiana), l'equazione di Eulero-Lagrange e la si risolva.

SOLUZIONE. Si veda la soluzione all'esercizio 3 del tutorato 11 del corso di FM210, A.A.2013/14, disponibile al link:

http://www.mat.uniroma3.it/users/giuliani/public_html/didattica/FM210_2013/tut11sol.pdf

Esercizio 4. Una lamina piana quadrata $ABCD$, omogenea, pesante, di massa M e lato ℓ , è vincolata (senza attrito) a muoversi su un piano verticale. Sui vertici A e C della lamina agiscono rispettivamente due forze elastiche di costante elastica k e centri $P_1 = (0, -d, 0)$ e $P_2 = (0, d, 0)$. Si assumano come coordinate lagrangiane le coordinate y e z del baricentro e l'angolo θ che la diagonale AC forma con l'asse y , come in figura. Si scrivano la Lagrangiana del sistema, le equazioni di Eulero-Lagrange e le si risolvano.

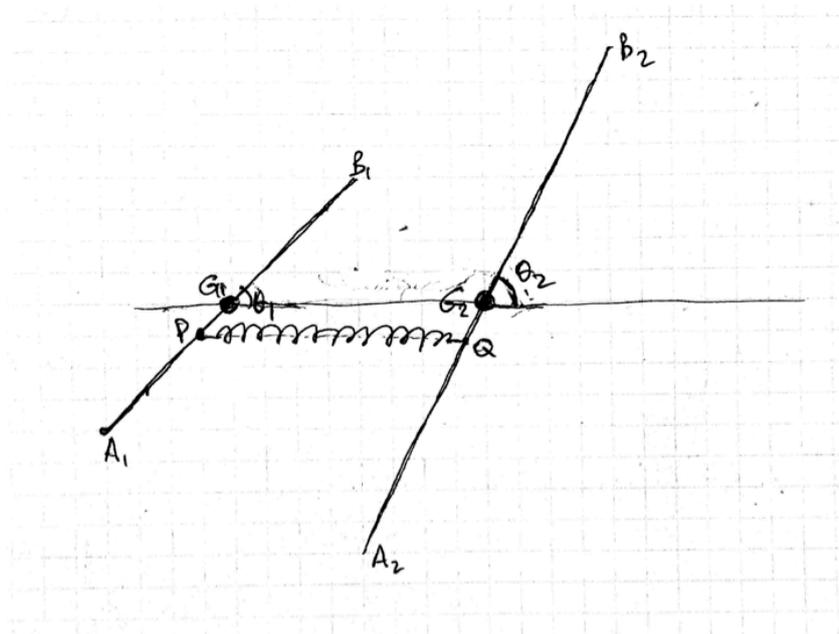


SOLUZIONE. Si veda la soluzione all'esercizio 5 del tutorato 11 del corso di FM210, A.A.2013/14, disponibile al link:

http://www.mat.uniroma3.it/users/giuliani/public_html/didattica/FM210_2013/tut11sol.pdf

Esercizio 5. In un piano orizzontale sono poste due aste sottili A_1B_1 e A_2B_2 di rispettive masse M_1 e M_2 (distribuzione di massa omogenea) e lunghezze L_1 e L_2 . Le aste sono libere di ruotare attorno ai rispettivi baricentri G_1 e G_2 , fissi nel piano, con $|\overrightarrow{G_1G_2}| = \ell > 0$. Si supponga che $\ell < \min\{L_1, L_2\}$.

Sia P un punto appartenente all'asta A_1B_1 , giacente tra G_1 e A_1 , Q un punto appartenente all'asta A_2B_2 , giacente tra G_2 e A_2 , tali che $|\overrightarrow{G_1P}| = |\overrightarrow{G_2Q}| = r > 0$. Tra i punti P e Q agisce una molla ideale, di costante elastica k .



- Scrivere la Lagrangiana del sistema usando come coordinate Lagrangiane gli angoli θ_1 e θ_2 indicati in figura [Si ricordi che i momenti di inerzia non banali di un'asta sottile omogenea di massa M e lunghezza L attorno al baricentro sono uguali a $I = ML^2/12$.]
- Si scrivano le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange e si determini l'espressione dell'energia conservata.
- Determinare i punti di equilibrio del sistema
- Discutere la stabilità degli equilibri al variare del parametro $\beta = \ell/(2r)$, nei casi in cui $\beta \neq 1$.
- Si consideri il limite in cui $\ell \rightarrow 0$: si osservi che il corrispondente sistema Lagrangiano è invariante sotto il gruppo di trasformazioni $(\theta_1, \theta_2) \rightarrow (\theta_1 + \alpha, \theta_2 + \alpha)$, con $\alpha \in \mathbb{R}$. Si determini la carica di Noether corrispondente.
- Nel caso $\ell = 0$, si passi a coordinate 'adattate alla simmetria': $\theta = \theta_1 - \theta_2$, $\Theta = (\theta_1 + \theta_2)/2$. Si scriva la Lagrangiana nelle nuove coordinate e si riconosca che Θ è una variabile ciclica. Con il metodo di riduzione di Routh, ci si riduca a un sistema Lagrangiano a un grado di libertà, e lo si risolva per quadrature.

SOLUZIONE.

- Dato che i baricentri delle due aste sono fissi, l'energia cinetica del sistema T è uguale alla somma delle energie cinetiche di rotazione delle due aste attorno ai loro baricentri:

$$T = \frac{M_1 L_1^2}{24} \dot{\theta}_1^2 + \frac{M_2 L_2^2}{24} \dot{\theta}_2^2$$

Usando gli angoli θ_1 e θ_2 in figura, in un sistema di riferimento con origine coincidente con G_1 e asse x orientato come $\overrightarrow{G_1 G_2}$, le coordinate di P e Q sono:

$$\begin{cases} x_P = -r \cos \theta_1 \\ y_P = -r \sin \theta_1 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_Q = \ell - r \cos \theta_2 \\ y_Q = -r \sin \theta_2 \end{cases}$$

Troviamo quindi che

$$|\overrightarrow{QP}|^2 = (x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2 = \ell^2 + 2r^2 - 2\ell r(\cos \theta_2 - \cos \theta_1) - 2r^2 \cos(\theta_1 - \theta_2).$$

Pertanto l'energia potenziale del sistema è

$$V(\theta_1, \theta_2) = \frac{1}{2} k [\ell^2 + 2r^2 - 2\ell r(\cos \theta_2 - \cos \theta_1) - 2r^2 \cos(\theta_1 - \theta_2)]$$

e la Lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \frac{M_1 L_1^2}{24} \dot{\theta}_1^2 + \frac{M_2 L_2^2}{24} \dot{\theta}_2^2 - \frac{1}{2} k [\ell^2 + 2r^2 - 2\ell r(\cos \theta_2 - \cos \theta_1) - 2r^2 \cos(\theta_1 - \theta_2)]$$

- Le equazioni di Eulero-Lagrange sono:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_1} = \frac{M_1 L_1^2}{12} \ddot{\theta}_1 = k\ell r \sin \theta_1 - kr^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_1}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_2} = \frac{M_2 L_2^2}{12} \ddot{\theta}_2 = -k\ell r \sin \theta_2 - kr^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_2}$$

L'energia conservata del sistema è:

$$E = \frac{M_1 L_1^2}{24} \dot{\theta}_1^2 + \frac{M_2 L_2^2}{24} \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} k [\ell^2 + 2r^2 - 2\ell r(\cos \theta_2 - \cos \theta_1) - 2r^2 \cos(\theta_1 - \theta_2)]$$

- I punti di equilibrio (θ_1^*, θ_2^*) del sistema sono tali che i moti ‘banali’ $(\theta_1(t), \theta_2(t)) \equiv (\theta_1^*, \theta_2^*)$ risolvono le equazioni di Eulero-Lagrange. Imponendo tale condizione troviamo:

$$\sin \theta_1^* = \frac{r}{\ell} \sin(\theta_1^* - \theta_2^*) = \sin \theta_2^*.$$

Dalla condizione $\sin \theta_1^* = \sin \theta_2^*$ abbiamo che o $\theta_1^* = \theta_2^*$, o $\theta_1^* = \pi - \theta_2^*$. Nel primo caso $\sin(\theta_1^* - \theta_2^*) = 0$, e quindi $\theta_1^* = \theta_2^* = 0$ o $\theta_1^* = \theta_2^* = \pi$. Nel secondo caso $\sin(\theta_1^* - \theta_2^*) = -\sin 2\theta_1^*$ e la condizione di equilibrio diventa quindi:

$$\sin \theta_1^* = -2\frac{r}{\ell} \sin \theta_1^* \cos \theta_1^*,$$

che ammette le seguenti soluzioni: $\theta_1^* = 0, \pi$, oppure, nel casp in cui $\beta \equiv \ell/(2r) < 1$, $\theta_1^* = \pm \arccos(-\beta)$. In conclusione, i punti di equilibrio sono (ricordando che $\arccos(-\beta) = \pi - \arccos \beta$):

$$(0, 0), \quad (\pi, \pi), \quad (0, \pi), \quad (\pi, 0), \quad (\arccos(-\beta), \arccos \beta), \quad (-\arccos(-\beta), -\arccos \beta),$$

dove ovviamente le ultime due soluzioni vanno prese in considerazione solo se $\beta < 1$.

- Per studiare la stabilità, calcoliamo la matrice Hessiana del potenziale $V(\theta_1, \theta_2)$:

$$\mathcal{H}(\theta_1, \theta_2) = \begin{pmatrix} -k\ell r \cos \theta_1 + kr^2 \cos(\theta_1 - \theta_2) & -kr^2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ -kr^2 \cos(\theta_1 - \theta_2) & k\ell r \cos \theta_2 + kr^2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \end{pmatrix}$$

Calcolando \mathcal{H} sui diversi punti di equilibrio troviamo:

$$\mathcal{H}(0, 0) = \begin{pmatrix} -k\ell r & 0 \\ 0 & k\ell r \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{H}(\pi, \pi) = \begin{pmatrix} k\ell r & 0 \\ 0 & -k\ell r \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{H}(0, \pi) = \begin{pmatrix} -k\ell r - kr^2 & kr^2 \\ kr^2 & -k\ell r - kr^2 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{H}(\pi, 0) = \begin{pmatrix} k\ell r - kr^2 & kr^2 \\ kr^2 & k\ell r - kr^2 \end{pmatrix}$$

e infine, se $\beta = \ell/(2r) < 1$,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\arccos(-\beta), \arccos \beta) &= \mathcal{H}(-\arccos(-\beta), -\arccos \beta) \\ &= \begin{pmatrix} k\ell r \beta - kr^2 \cos(2 \arccos \beta) & kr^2 \cos(2 \arccos \beta) \\ kr^2 \cos(2 \arccos \beta) & k\ell r \beta - kr^2 \cos(2 \arccos \beta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} kr^2 & k(\frac{\ell^2}{2} - r^2) \\ k(\frac{\ell^2}{2} - r^2) & kr^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dalle espressioni sopra, vediamo che $(0, 0)$, (π, π) e $(0, \pi)$ sono sempre instabili.

Per quanto riguarda $(\pi, 0)$, noto che l’Hessiana in $(\pi, 0)$ ha determinante uguale a

$$2k^2\ell r^3(\beta - 1),$$

che è: (1) negativo per $\beta < 1$, nel qual caso $(\pi, 0)$ è instabile; (2) positivo per $\beta > 1$: in tal caso noto che l’elemento di matrice in alto a sinistra è uguale a $kr^2(2\beta - 1) > 1$, e quindi $(\pi, 0)$ è stabile.

Infine, se $\beta < 1$, noto che l’Hessiana in $\pm(\arccos(-\beta), \arccos \beta)$ ha determinante uguale a $k^2r^2\ell^2(1 - \beta) > 0$; inoltre l’elemento di matrice in alto a sinistra è positivo, e quindi $\pm(\arccos(-\beta), \arccos \beta)$, quando esistono, sono stabili.

- Per $\ell \rightarrow 0$ la Lagrangiana diventa:

$$\mathcal{L} = \frac{M_1 L_1^2}{24} \dot{\theta}_1^2 + \frac{M_2 L_2^2}{24} \dot{\theta}_2^2 - kr^2(1 - \cos(\theta_1 - \theta_2))$$

che è invariante sotto il gruppo di trasformazioni $(\theta_1, \theta_2) \rightarrow (\theta_1 + \alpha, \theta_2 + \alpha)$, con $\alpha \in \mathbb{R}$. Pertanto per il teorema di Noether la quantità $p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_1} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_2} = \frac{M_1 L_1^2}{12} \dot{\theta}_1 + \frac{M_2 L_2^2}{12} \dot{\theta}_2$ si conserva.

- Per $\ell = 0$ la Lagrangiana nelle nuove coordinate diventa:

$$\tilde{\mathcal{L}}(\theta, \dot{\theta}, \dot{\Theta}) = \frac{M_1 L_1^2}{24} \left(\dot{\Theta} + \frac{\dot{\theta}}{2}\right)^2 + \frac{M_2 L_2^2}{24} \left(\dot{\Theta} - \frac{\dot{\theta}}{2}\right)^2 - kr^2(1 - \cos \theta)$$

che non dipende dalla variabile Θ : pertanto la variabile Θ è una variabile ciclica, il momento coniugato

$$p_\Theta = \frac{M_1 L_1^2}{12} \left(\dot{\Theta} + \frac{\dot{\theta}}{2}\right) + \frac{M_2 L_2^2}{12} \left(\dot{\Theta} - \frac{\dot{\theta}}{2}\right)$$

è conservato: $p_\Theta(t) \equiv I$, che implica

$$\dot{\Theta} = \frac{12I}{M_1 L_1^2 + M_2 L_2^2} - \frac{M_1 L_1^2 - M_2 L_2^2}{2(M_1 L_1^2 + M_2 L_2^2)} \dot{\theta} \equiv a - b\dot{\theta}.$$

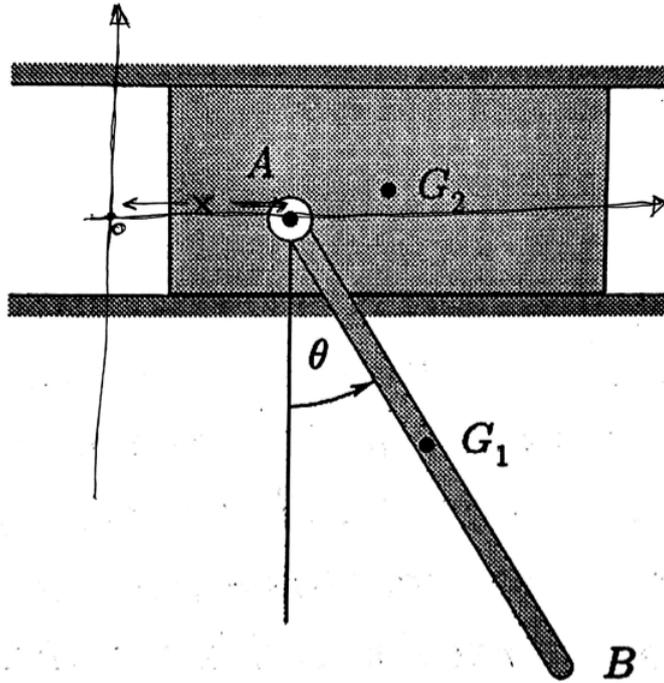
Possiamo applicare il metodo di Routh per ridurre il sistema a un sistema Lagrangiano a un grado di libertà, con Lagrangiana:

$$\mathcal{L}_R = \mathcal{L}_R(\theta, \dot{\theta}) = \tilde{\mathcal{L}}(\theta, \dot{\theta}, \dot{\Theta}) - I\dot{\Theta} \Big|_{\dot{\Theta}=a-b\dot{\theta}},$$

che può essere risolto per quadrature seguendo la strategia generale di soluzione dei sistemi meccanici conservativi unidimensionali (dettagli lasciati al lettore).

ESERCIZIO 6. Un sistema piano articolato a vincoli perfetti è costituito da una sbarra rigida rettilinea AB omogenea pesante (di lunghezza 2ℓ e massa M) collegata in A con una cerniera ad una lamina (di massa $2M$) vincolata a muoversi di moto traslatorio rettilineo in direzione orizzontale. All'istante iniziale t_0 , il sistema si trova in quiete (i.e., velocità nulla) con la sbarra in posizione orizzontale.

- Scrivere la Lagrangiana del sistema usando come coordinate Lagrangiane l'angolo θ indicato in figura e la posizione orizzontale x di A calcolata rispetto a O , come mostrato in figura.
- Scrivere le equazioni di Eulero-Lagrange del sistema. Si riconosca che l'energia meccanica è conservata. Inoltre, si osservi che x è una variabile ciclica e si calcoli il momento conservato corrispondente.
- Si calcolino i valori delle due grandezze conservate corrispondenti al dato iniziale assegnato. Usando la due leggi di conservazione, determinare le velocità dei baricentri G_1 della sbarra e G_2 della lamina nel primo istante t_1 successivo a t_0 nel quale la sbarra è verticale. Usando le equazioni di Eulero-Lagrange, si calcolino le accelerazioni di G_1 e G_2 all'istante t_1 .
- Determinare le configurazioni di equilibrio del sistema e studiarne la stabilità



SOLUZIONE. Se (c_1, c_2) sono le due coordinate del vettore $\overrightarrow{AG_2}$, abbiamo

$$\begin{cases} x_{G_2} = x + c_1 \\ y_{G_2} = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_{G_2} = \dot{x} \\ \dot{y}_{G_2} = 0 \end{cases}$$

Pertanto l'energia cinetica della lamina è $T_2 = M\dot{x}^2$. Inoltre

$$\begin{cases} x_{G_1} = x + \ell \sin \theta \\ y_{G_1} = -\ell \cos \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_{G_1} = \dot{x} + \ell \dot{\theta} \cos \theta \\ \dot{y}_{G_1} = \ell \dot{\theta} \sin \theta \end{cases}$$

Applicando il teorema di König otteniamo che l'energia cinetica dell'asta è (ricordando che il momento d'inerzia dell'asta attorno al baricentro è $I = \frac{1}{12}M(2\ell)^2 = \frac{1}{3}M\ell^2$):

$$T_1 = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \ell^2\dot{\theta}^2 + 2\ell\dot{\theta}\dot{x}\cos\theta) + \frac{1}{6}M\ell^2\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{2}{3}M\ell^2\dot{\theta}^2 + M\ell\dot{\theta}\dot{x}\cos\theta.$$

La barretta è soggetta alla forza peso per cui: $V(\theta) = -Mgl\cos\theta$. La Lagrangiana è quindi:

$$\mathcal{L} = \frac{3}{2}M\dot{x}^2 + \frac{2}{3}M\ell^2\dot{\theta}^2 + M\ell\dot{\theta}\dot{x}\cos\theta + Mgl\cos\theta.$$

• Abbiamo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} &= -M\ell\dot{\theta}\dot{x}\sin\theta - Mgl\sin\theta \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} &= \frac{4}{3}M\ell^2\ddot{\theta} + M\ell\ddot{x}\cos\theta - M\ell\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} &= 3M\ddot{x} + M\ell\ddot{\theta}\cos\theta - M\ell\dot{\theta}^2\sin\theta \end{aligned}$$

Pertanto le equazioni di Eulero-Lagrange sono:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = \frac{4}{3} M \ell^2 \ddot{\theta} + M \ell \ddot{x} \cos \theta - M \ell \dot{x} \dot{\theta} \sin \theta = -M \ell \dot{\theta} \dot{x} \sin \theta - M g \ell \sin \theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = 3M \ddot{x} + M \ell \ddot{\theta} \cos \theta - M \ell \dot{\theta}^2 \sin \theta = 0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}$$

L'energia meccanica è:

$$E = \frac{3}{2} M \dot{x}^2 + \frac{3}{2} M \ell^2 \dot{\theta}^2 + M \ell \dot{\theta} \dot{x} \cos \theta - M g \ell \cos \theta.$$

La verifica esplicita della conservazione di E è lasciata al lettore. Notiamo inoltre che $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0$ pertanto la variabile x è una variabile ciclica e quindi il momento conservato corrispondente,

$$p_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = 3M \dot{x} + M \ell \dot{\theta} \cos \theta,$$

è una grandezza conservata: $p_x(t) \equiv I$.

- $\theta(t_0) = \frac{\pi}{2}$ e, poiché il sistema è in quiete, $\dot{x}(t_0) = 0$ e $\dot{\theta}(t_0) = 0$. Quindi $E = 0$ e $I = 0$. All'istante t_1 abbiamo $\theta(t_1) = 0$, e dunque, usando le leggi di conservazione di E e I , troviamo che, all'istante t_1 :

$$\begin{cases} \frac{3}{2} \dot{x}^2 + \frac{2}{3} \ell^2 \dot{\theta}^2 + \ell \dot{\theta} \dot{x} - g \ell = 0 \\ 3\dot{x} + \ell \dot{\theta} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\ell}{6} \dot{\theta}^2 + \frac{2}{3} \ell \dot{\theta}^2 - \dot{\theta}^2 \frac{\ell}{3} - g = 0 \\ \dot{x} = -\frac{\ell}{3} \dot{\theta} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{\theta}(t_1) = -\sqrt{\frac{2g}{\ell}} \\ \dot{x}(t_1) = \frac{1}{3} \sqrt{2g\ell} \end{cases}$$

cosicché le velocità di G_1 e G_2 all'istante t_1 sono:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_{G_1}(t_1) \\ \dot{y}_{G_1}(t_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t_1) + \ell \dot{\theta}(t_1) \cos \theta(t_1) \\ \ell \dot{\theta}(t_1) \sin \theta(t_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \sqrt{2g\ell} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_{G_2}(t_1) \\ \dot{y}_{G_2}(t_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t_1) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \sqrt{2g\ell} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Per calcolare le accelerazioni, rimpiazziamo i valori trovati per le velocità nelle equazioni di Eulero-Lagrange. Troviamo così che, al tempo t_1 :

$$\begin{cases} \frac{4}{3} \ell \ddot{\theta} + \ddot{x} = 0 \\ 3\ddot{x} + \ell \ddot{\theta} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ddot{\theta}(t_1) = 0 \\ \ddot{x}(t_1) = 0 \end{cases}$$

Le accelerazioni di G_1 e G_2 al tempo t_1 sono quindi:

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_{G_1}(t_1) \\ \ddot{y}_{G_1}(t_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{x}(t_1) + \ell \ddot{\theta}(t_1) \cos \theta(t_1) - \ell \dot{\theta}^2(t_1) \sin \theta(t_1) \\ \ell \ddot{\theta}(t_1) \sin \theta(t_1) + \ell \dot{\theta}^2(t_1) \cos \theta(t_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2g \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_{G_2}(t_1) \\ \ddot{y}_{G_2}(t_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{x}(t_1) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- I punti di equilibrio (x^*, θ^*) sono tali che i moti 'banali' $(x(t), \theta(t)) \equiv (x^*, \theta^*)$ risolvono le equazioni di Eulero-Lagrange. Troviamo $\sin \theta^* = 0$, e quindi $\theta^* = 0, \pi$. I punti di equilibrio sono quindi infiniti, della forma $(x^*, 0)$ o (x^*, π) , con $x^* \in \mathbb{R}$. Notiamo che il potenziale $V(\theta) = -Mg\ell \cos \theta$ ha un minimo in $\theta = 0$ e un massimo in $\theta = \pi$: i punti di equilibrio della forma $(x^*, 0)$ sono quindi stabili, mentre quelli della forma (x^*, π) sono instabili.