Tutorato 8 - MA/FM210 - 12/5/2017

Esercizio 1. Si calcolino i momenti principali di inerzia dei seguenti corpi rigidi rispetto al loro centro di massa:

1. Disco sottile omogeneo di massa M e raggio R [Risposta: $I_1 = I_2 = \frac{1}{4}MR^2$, $I_3 = \frac{1}{2}MR^2$].
2. Lamina quadrata sottile omogenea di lato ℓ e massa M [Risposta: $I_1 = I_2 = \frac{1}{12}M\ell^2$, $I_3 = \frac{1}{6}M\ell^2$].
3. Cilindro circolare retto omogeneo di massa M, raggio R e altezza h [Risposta: $I_1 = I_2 = \frac{1}{12}M(3R^2 + h^2)$, $I_3 = \frac{1}{2}MR^2$].
4. Sfera omogenea di massa M e raggio R [Risposta: $I_1 = I_2 = I_3 = \frac{2}{5}MR^2$].

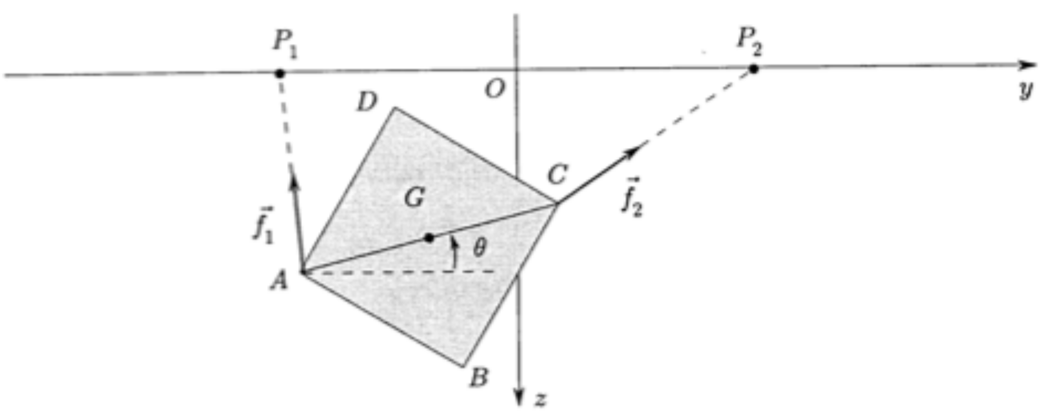
Esercizio 2. Si dimostri il seguente teorema (Huygens-Steiner): Sia dato un corpo rigido con centro di massa G e distribuzione di massa $\{\mathbf{q_i}, m_i\}$. Assegnate due rette parallele r_0 ed r_1 in direzione $\hat{\xi}$ e passanti la prima per G e la seconda per un punto P, vale la seguente identità:

$$I(r_1) = I(r_0) + Md^2$$

dove $I(r_i) = \sum_i m_i \mathrm{dist}^2(\mathbf{q_i}, r_i)$ è il momento di inerzia del corpo rigido rispetto alla retta r_i, e d è la distanza tra r_0 ed r_1.

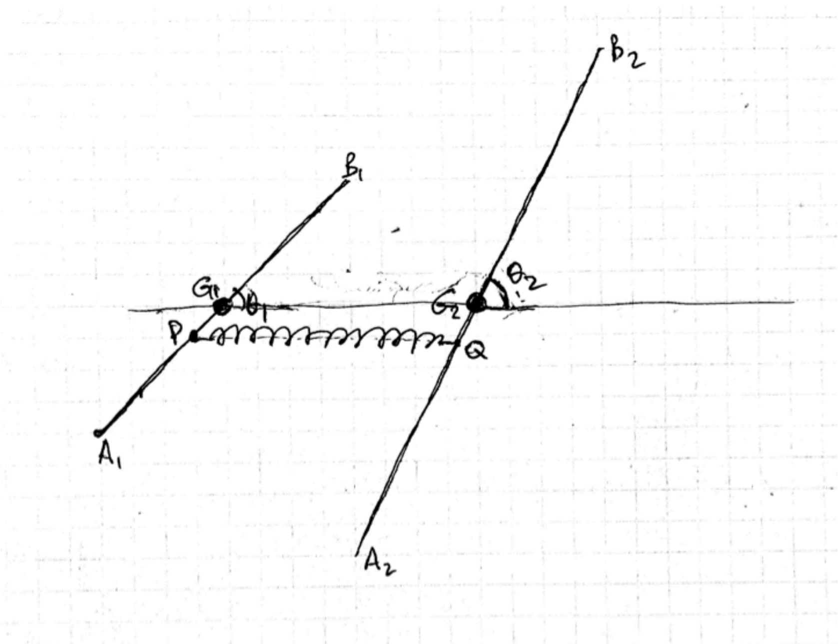
Esercizio 3. Un cilindro circolare retto omogeneo di massa M, raggio R e altezza h rotola senza strisciare su un piano orizzontale, in modo tale che il suo centro di massa G ha coordinate $(x(t), 0, R)$ ad ogni istante di tempo. Il centro di massa G è collegato da una molla di costante elastica k e centro $(0, 0, R)$. Si scriva la Lagrangiana del sistema (usando x come coordinata lagrangiana), l'equazione di Eulero-Lagrange e la si risolva.

Esercizio 4. Una lamina piana quadrata $ABCD$, omogenea, pesante, di massa M e lato ℓ, è vincolata (senza attrito) a muoversi su un piano verticale. Sui vertici A e C della lamina agiscono rispettivamente due forze elastiche di costante elastica k e centri $P_1 = (0, -d, 0)$ e $P_2 = (0, d, 0)$. Si assumano come coordinate lagrangiane le coordinate y e z del baricentro e e l'angolo θ che la diagonale AC forma con l'asse y, come in figura. Si scrivano la Lagrangiana del sistema, le equazioni di Eulero-Lagrange e le si risolvano.



Esercizio 5. In un piano orizzontale sono poste due aste sottili A_1B_1 e A_2B_2 di rispettive masse M_1 e M_2 (distribuzione di massa omogenea) e lunghezze L_1 e L_2. Le aste sono libere di ruotare attorno ai rispettivi baricentri G_1 e G_2, fissi nel piano, con $|\overrightarrow{G_1G_2}| = \ell > 0$. Si supponga che $\ell < \min\{L_1, L_2\}$.

Sia P un punto appartenente all'asta A_1B_1, giacente tra G_1 e A_1, Q un punto appartenente all'asta A_2B_2, giacente tra G_2 e A_2, tali che $|\overrightarrow{G_1P}| = |\overrightarrow{G_2Q}| = r > 0$. Tra i punti P e Q agisce una molla ideale, di costante elastica k.



- Scrivere la Lagrangiana del sistema usando come coordinate Lagrangiane gli angoli θ_1 e θ_2 indicati in figura [Si ricordi che i momenti di inerzia non banali di un'asta sottile omogenea di massa M e lunghezza L attorno al baricentro sono uguali a $I = ML^2/12$.]

- Si scrivano le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange e si determini l'espressione dell'energia conservata.

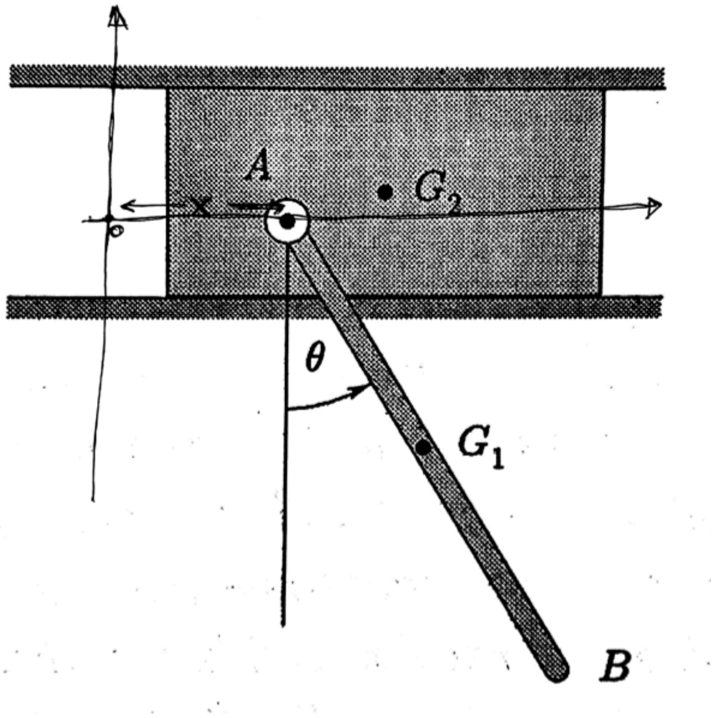
- Determinare i punti di equilibrio del sistema

- Discutere la stabilità degli equilibri al variare del parametro $\beta = \ell/(2r)$, nei casi in cui $\beta \neq 1$.

- Si consideri il limite in cui $\ell \to 0$: si osservi che il corrispondente sistema Lagrangiano è invariate sotto il gruppo di trasformazioni $(\theta_1, \theta_2) \to (\theta_1 + \alpha, \theta_2 + \alpha)$, con $\alpha \in \mathbb{R}$. Si determini la carica di Noether corrispondente.

- Nel caso $\ell = 0$, si passi a coordinate 'adattate alla simmetria': $\theta = \theta_1 - \theta_2$, $\Theta = (\theta_1 + \theta_2)/2$. Si scriva la Lagrangiana nelle nuove coordinate e si riconosca che Θ è una variabile ciclica. Con il metodo di riduzione di Routh, ci si riduca a un sistema Lagrangiano a un grado di libertà, e lo si risolva per quadrature.

Esercizio 6. Un sistema piano articolato a vincoli perfetti è costituito da una sbarra rigida rettilinea AB omogenea pesante (di lunghezza 2ℓ e massa M) collegata in A con una cerniera ad una lamina (di massa $2M$) vincolata a muoversi di moto traslatorio rettilineo in direzione orizzontale. All'istante iniziale t_0, il sistema si trova in quiete (i.e., velocità nulla) con la sbarra in posizione orizzontale.



- Scrivere la Lagrangiana del sistema usando come coordinate Lagrangiane l'angolo θ indicato in figura e la posizione orizzontale x di A calcolata rispetto a O, come mostrato in figura.

- Scrivere le equazioni di Eulero-Lagrange del sistema. Si riconosca che l'energia meccanica è conservata. Inoltre, si osservi che x è una variabile ciclica e si calcoli il momento conservato corrispondente.

- Si calcolino i valori delle due grandezze conservate corrispondenti al dato iniziale assegnato. Usando la due leggi di conservazione, determinare le velocità dei baricentri G_1 della sbarra e G_2 della lamina nel primo istante t_1 successivo a t_0 nel quale la sbarra è verticale. Usando le equazioni di Eulero-Lagrange, si calcolino le accelerazioni di G_1 e G_2 all'istante t_1.

- Determinare le configurazioni di equilibrio del sistema e studiarne la stabilità