

FM210 / MA - Seconda prova pre-esonero (23-5-2018)

1. Un sistema meccanico è costituito da due sbarre uguali AB e BC , rettilinee, omogenee, di massa M e lunghezza ℓ , incernierate tra loro in B . Le due sbarre sono vincolate a muoversi in un piano verticale, mantenendo i loro estremi A e C sull'asse orizzontale x . Oltre alla forza peso, sul sistema agiscono due forze elastiche di costante elastica k : la prima, di centro $O = (0, 0)$, agisce su A , mentre la seconda, di centro $Q = (2\ell, 0)$, agisce su C . Si usino come coordinate Lagrangiane l'angolo θ che la sbarra AB forma con la verticale discendente, misurato in senso antiorario, e l'ascissa x del punto B . Si suppongano tutti i vincoli come ideali.

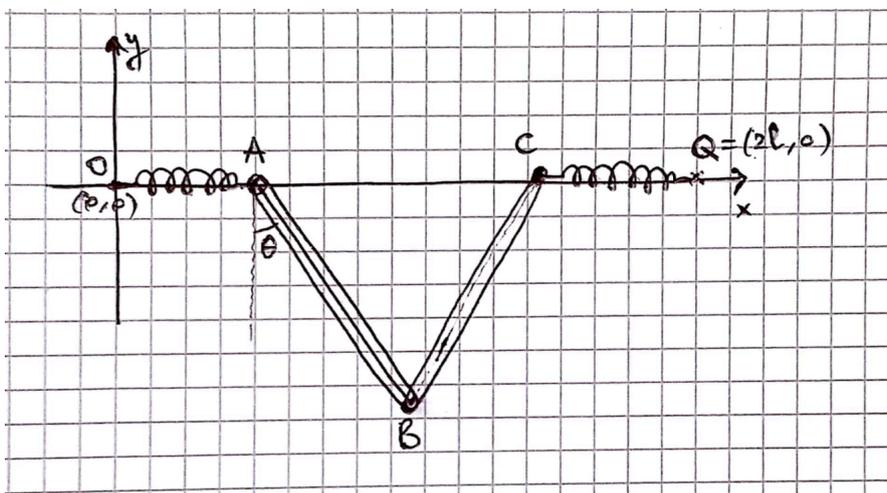


Figura 1: Il sistema di due aste vincolato descritto nel testo.

- (a) Scrivere la Lagrangiana del sistema e le equazioni di Eulero-Lagrange.
- (b) Determinare i punti di equilibrio e studiarne la stabilità.
- (c) Si integri il moto per quadrature (più precisamente, si calcoli esplicitamente il moto di x e si riduca alla quadrature quello di θ) e se ne discuta la natura qualitativa.

SOLUZIONE.

- (a) Per scrivere la Lagrangiana del sistema occorre calcolare l'energia cinetica e potenziale del sistema nelle coordinate Lagrangiane x, θ assegnate.

Energia cinetica. L'energia cinetica totale è la somma delle energie cinetiche delle due aste, ognuna delle quali, usando il teorema di König, è la somma dell'energia cinetica traslazionale associata al moto del centro di massa e dell'energia cinetica di rotazione attorno al centro di massa. Il centro di massa dell'asta AB è $\mathbf{x}_{G_1} = (x - \frac{\ell}{2} \sin \theta, -\frac{\ell}{2} \cos \theta)$, cosicché $\dot{\mathbf{x}}_{G_1} = (\dot{x} - \frac{\ell}{2} \dot{\theta} \cos \theta, \frac{\ell}{2} \dot{\theta} \sin \theta)$. Quindi l'energia cinetica dell'asta AB è

$$T_{AB} = \frac{M}{2} \left[(\dot{x} - \frac{\ell}{2} \dot{\theta} \cos \theta)^2 + \frac{1}{4} \ell^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta \right] + \frac{1}{2} I_{G_1} \dot{\theta}^2,$$

dove l'ultimo termine rappresenta l'energia cinetica di rotazione attorno al centro di massa, con $I_{G_1} = \frac{1}{12} M \ell^2$. Analogamente,

$$T_{BC} = \frac{M}{2} \left[(\dot{x} + \frac{\ell}{2} \dot{\theta} \cos \theta)^2 + \frac{1}{4} \ell^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta \right] + \frac{1}{2} \frac{M \ell^2}{12} \dot{\theta}^2.$$

Sommando le due espressioni troviamo l'energia cinetica totale:

$$T = T_{AB} + T_{BC} = M \dot{x}^2 + \frac{M \ell^2}{3} \dot{\theta}^2.$$

Energia potenziale. L'energia potenziale è la somma delle energie potenziali gravitazionali delle due aste più l'energia potenziale elastica delle due molle:

$$\begin{aligned} U &= -Mg\ell \cos \theta + \frac{1}{2} k [(x - \ell \sin \theta)^2 + (2\ell - x - \ell \sin \theta)^2] \\ &= -Mg\ell \cos \theta + k [x^2 - 2\ell x + \ell^2 \sin^2 \theta - 2\ell^2 \sin \theta + 2\ell^2]. \end{aligned}$$

La Lagrangiana del sistema è uguale all'energia cinetica meno l'energia potenziale. Quindi, eliminando una costante additiva, che non cambia le equazioni del moto,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x, \theta, \dot{x}, \dot{\theta}) &= \\ &= M \dot{x}^2 + \frac{M \ell^2}{3} \dot{\theta}^2 - k(x^2 - 2\ell x) + Mg\ell \cos \theta + k\ell^2(-\sin^2 \theta + 2 \sin \theta), \end{aligned}$$

cosicché le equazioni di Eulero-Lagrange sono:

$$\begin{aligned} 2M\ddot{x} &= -2k(x - \ell), \\ \frac{2M\ell^2}{3}\ddot{\theta} &= -Mg\ell \sin \theta + 2k\ell^2(-\sin \theta \cos \theta + \cos \theta). \end{aligned}$$

- (b) I punti di equilibrio del sistema si ottengono ponendo i due membri di destra delle equazioni di Eulero-Lagrange uguali a zero: $x_{eq} = \ell$, mentre θ_{eq} è una soluzione dell'equazione

$$Mg \sin \theta = 2k\ell \cos \theta (1 - \sin \theta).$$

Si noti che in corrispondenza delle soluzioni di questa equazione, $\cos \theta \neq 0$ (infatti si vede immediatamente che $\cos \theta = 0$ non è soluzione), quindi posso dividere per $\cos \theta$ e riscrivere l'equazione equivalentemente nella forma: $\alpha \tan \theta = 1 - \sin \theta$, con $\alpha = Mg/(2k\ell)$. Per stabilire quante soluzioni ammette tale equazione, possiamo procedere con un metodo grafico: disegniamo il grafico di $\alpha \tan \theta$ e di $1 - \sin \theta$ e contiamo le intersezioni. Si vede immediatamente che l'equazione ammette due soluzioni, $\theta_1 \in (0, \frac{\pi}{2})$ e $\theta_2 \in (\pi, \frac{3}{2}\pi)$. Per determinare la stabilità dei punti di equilibrio, calcoliamo la matrice delle derivate seconde di U :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial(x, \theta)^2} \Big|_{x=\ell, \theta=\theta_i} = \begin{pmatrix} 2k & 0 \\ 0 & 2k\ell^2(\alpha \cos \theta_i + \cos^2 \theta_i - \sin^2 \theta_i + \sin \theta_i) \end{pmatrix},$$

dove $i \in \{1, 2\}$ e $\alpha = Mg/(2k\ell)$. Per definizione, $\alpha \tan \theta_i = 1 - \sin \theta_i$; quindi, nell'elemento in basso a destra della matrice delle derivate seconde possiamo rimpiazzare α con $(1 - \sin \theta_i) \cos \theta_i / \sin \theta_i$, cosicché tale elemento è uguale a

$$\begin{aligned} & 2k\ell^2 \left[\frac{(1 - \sin \theta_i)}{\sin \theta_i} \cos^2 \theta_i + \cos^2 \theta_i - \sin^2 \theta_i + \sin \theta_i \right] = \\ & = \frac{2k\ell}{\sin \theta_i} (1 - \sin^3 \theta_i), \end{aligned}$$

che ha lo stesso segno di $\sin \theta_i$: quindi, ricordando che $\theta_1 \in (0, \pi/2)$ e $\theta_2 \in (\pi, 3\pi/2)$, abbiamo che l'elemento in basso a sinistra della matrice delle derivate seconde è positivo in θ_1 e negativo in θ_2 . In conclusione, il punto di equilibrio $(x, \theta) = (\ell, \theta_1)$ è stabile, in quanto corrisponde a un minimo non degenere dell'energia potenziale, mentre (ℓ, θ_2) è instabile, in quanto corrisponde a un punto sella.

- (c) L'equazione del moto per la variabile x è quella di un oscillatore armonico: $\ddot{x} = -\frac{k}{M}(x - \ell)$, che è risolta da

$$x(t) = \ell + (x_0 - \ell) \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t),$$

con $\omega = \sqrt{\frac{k}{M}}$, $x_0 = x(0)$ e $v_0 = \dot{x}(0)$.

L'equazione del moto per la variabile θ è $\ddot{\theta} = -u'(\theta)$, con

$$u(\theta) = \frac{3}{2M\ell^2}(-Mg\ell \cos \theta + k\ell^2(\sin^2 \theta - 2 \sin \theta)),$$

che è quella di un sistema unidimensionale di massa unitaria e energia potenziale $u(\theta)$. La funzione $u(\theta)$ è periodica di periodo 2π e, per quanto discusso sopra, ha un minimo in θ_1 e un massimo in θ_2 : il suo grafico qualitativo è mostrato in Figura 2.

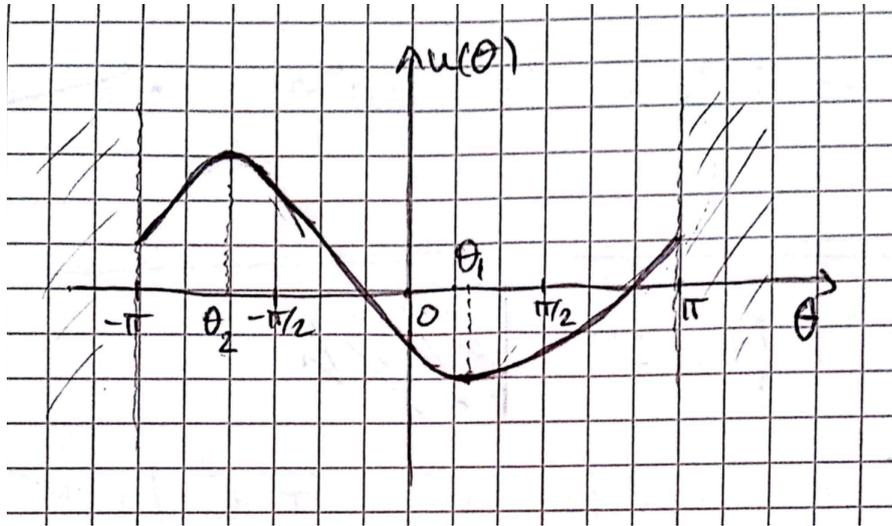


Figura 2: Il grafico di $u(\theta)$.

Le traiettorie del moto nel piano delle fasi ridotto $(\theta, \dot{\theta})$ coincidono con le curve di livello $E' = \frac{\dot{\theta}^2}{2} + u(\theta)$, al variare di E' , e sono mostrate in Figura 3.

Come evidente, le curve di livello hanno qualitativamente la stessa forma di quelle del pendolo matematico, con la differenza che i punti di equilibrio stabile e instabile sono in θ_1, θ_2 , piuttosto che in $0, \pi$. In particolare, al variare di E' si ottengono: (1) moti periodici che consistono in oscillazioni attorno al punto di equilibrio stabile, (2) moti periodici che consistono in oscillazioni 'aperte' che si svolgono sempre in senso orario o sempre in senso antiorario, (3) moti aperiodici sulla separatrice, che convergono nel passato e nel futuro al punto di equilibrio instabile, impiegando un tempo infinito per raggiungerlo.

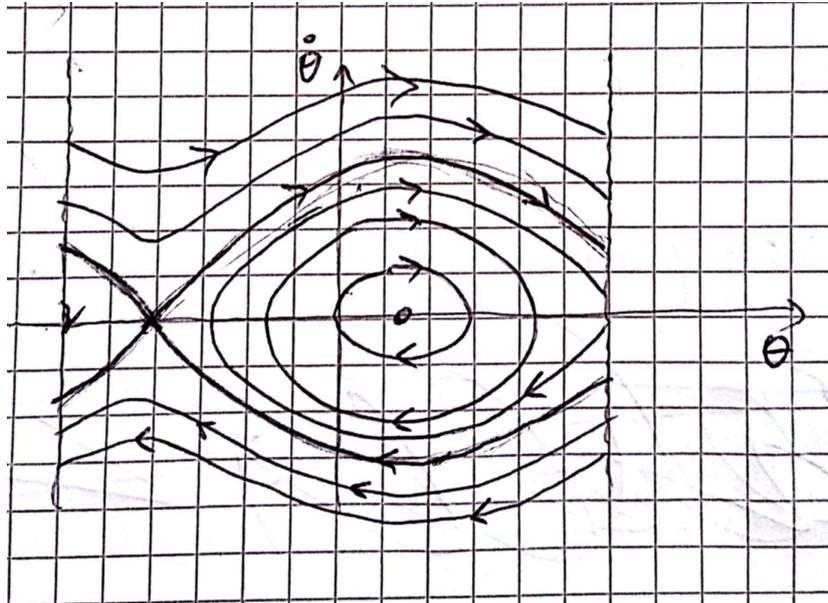


Figura 3: Grafico delle curve di livello $E' = \frac{\dot{\theta}^2}{2} + u(\theta)$, al variare di E' .

La soluzione per quadrature si ottiene invertendo

$$t = \pm \int_{\theta(0)}^{\theta(t)} \frac{d\theta}{\sqrt{2(E' - u(\theta))}},$$

con l'usuale convenzione per la scelta del segno (il segno positivo si riferisce a porzioni di traiettoria sul semipiano delle fasi positivo, e viceversa).

Tutorato 8 - MA/FM210 - 22/05/2018

ESERCIZIO 1. Per $q > 0$ si consideri la lagrangiana

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \frac{\dot{q}^2}{2q^2} - \log q$$

1. Determinare l'Hamiltoniana.
2. Determinare le equazioni di Hamilton.
3. Determinare la trasformazione canonica generata dalla funzione generatrice di seconda specie $F(q, P) = P \log q$.
4. Usare la trasformazione canonica trovata al punto precedente per integrare le equazioni del moto con dati iniziali $q(0) = 1, p(0) = 0$.

SOLUZIONE.

1. Abbiamo $p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \frac{\dot{q}}{q^2}$ da cui otteniamo $\dot{q} = pq^2$ e quindi

$$H(p, q) = \frac{p^2 q^2}{2} + \log q \quad (1)$$

2. Le equazioni di Hamilton sono:

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = pq^2 \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -p^2 q - \frac{1}{q} \end{cases}$$

3. La trasformazione canonica generata da F è data da

$$\begin{cases} p = \frac{\partial F}{\partial q} = \frac{P}{q} \\ Q = \frac{\partial F}{\partial P} = \log q \end{cases}$$

da cui otteniamo la trasformazione

$$P(p, q) = pq \quad Q(p, q) = \log q \quad (2)$$

4. La nuova Hamiltoniana è data da $\tilde{H}(P, Q) = \frac{P^2}{2} + Q$ e le nuove equazioni del moto sono:

$$\begin{cases} \dot{Q} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P} = P \\ \dot{P} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q} = -1 \end{cases}$$

da cui otteniamo

$$P(t) = P(0) - t, \quad Q(t) = Q(0) + P(0)t - \frac{t^2}{2},$$

con dati iniziali $Q(0) = \log 1 = 0, P(0) = 0$ da cui otteniamo

$$q(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}, \quad p(t) = -te^{-\frac{t^2}{2}} \quad (3)$$

ESERCIZIO 2. Si consideri l'Hamiltoniana

$$H = \frac{p^2}{2} e^{-2q}$$

1. Determinare le equazioni del moto.
2. Determinare la Lagrangiana associata.
3. Determinare la trasformazione canonica generata dalla funzione generatrice di prima specie $F(q, Q) = Q^2 e^q$ e determinare la nuova Hamiltoniana.
4. Usare la trasformazione canonica trovata al punto precedente per risolvere le equazioni con dati iniziali $q(0) = 0, p(0) = 1$.

SOLUZIONE.

1. Le equazioni di Hamilton sono:

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = p e^{-2q} \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = p^2 e^{-2q} \end{cases}$$

2. Dalla prima equazione di Hamilton, abbiamo che $p = \dot{q} e^{2q}$ La Lagrangiana associata all'Hamiltoniana assegnata è

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \max_p \{p\dot{q} - H(q, p)\} = \left[p\dot{q} - H(q, p) \right] \Big|_{p=\dot{q}e^{2q}} = \frac{1}{2} \dot{q}^2 e^{2q}$$

3. La trasformazione canonica generata da F è

$$\begin{cases} p = \frac{\partial F}{\partial q} = Q^2 e^q \\ P = -\frac{\partial F}{\partial Q} = -2Q e^q \end{cases}$$

che si può invertire in

$$\begin{cases} Q = \sqrt{p} e^{-q/2} \\ P = -2\sqrt{p} e^{q/2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = \log\left(-\frac{P}{2Q}\right) \\ p = -\frac{1}{2}QP \end{cases} \quad (4)$$

Si noti che la trasformazione così determinata mappa in modo invertibile $(q, p) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty)$ in $(Q, P) \in (0, +\infty) \times (-\infty, 0)$.

L'Hamiltoniana nelle nuove coordinate è

$$\tilde{H}(Q, P) = \frac{1}{2} Q^4$$

4. Le equazioni di Hamilton nelle nuove coordinate sono semplicemente

$$\begin{cases} \dot{Q} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P} = 0 \\ \dot{P} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q} = -2Q^3 \end{cases}$$

la cui soluzione è

$$Q(t) = Q(0), \quad P(t) = P(0) - 2[Q(0)]^3 t.$$

I dati iniziali $q(0) = 0, p(0) = 1$ corrispondono, nelle nuove variabili, a $Q(0) = 1, P(0) = -2$, come si vede usando la prima delle (4). La soluzione desiderata nelle nuove variabili è, quindi,

$$Q(t) = 1, \quad P(t) = -2(t + 1).$$

Usando la seconda delle (4) otteniamo la soluzione desiderata nelle coordinate originali:

$$q(t) = \log(t + 1), \quad p(t) = t + 1,$$

che è definita per $t > -1$.

2. Si considerino le equazioni del moto

$$\begin{cases} \dot{q} = q^2 p \\ \dot{p} = -p^2 q - 1/q, \end{cases}$$

per $q > 0$ e $p \in \mathbb{R}$.

- (a) Si riconosca che tale sistema di equazioni è Hamiltoniano e si determini l'Hamiltoniana corrispondente.
- (b) Si calcoli la trasformazione canonica associata alla funzione generatrice di seconda specie $G(q, P) = P \log q$
- (c) Si determini l'Hamiltoniana nelle nuove variabili Q, P . Si calcolino e risolvano le corrispondenti equazioni di Hamilton.
- (d) Si usi la trasformazione determinata sopra, nonché la soluzione delle equazioni del moto nelle variabili (Q, P) , per risolvere le equazioni del moto originali per le variabili (q, p) , in corrispondenza dei dati iniziali $q(0) = p(0) = 1$. Si verifichi esplicitamente che la soluzione trovata risolve le equazioni del moto originali.

SOLUZIONE.

- (a) Il sistema assegnato è Hamiltoniano se e solo se esiste $H(q, p)$ tale che $\partial_p H(q, p) = q^2 p$ e $\partial_q H(q, p) = p^2 q + 1/q$. Integrando le due equazioni troviamo

$$H(q, p) = \frac{q^2 p^2}{2} + \log q.$$

- (b) La trasformazione canonica associata alla funzione generatrice di seconda specie $G(q, P) = P \log q$ è tale che

$$p = \frac{\partial G}{\partial q} = \frac{P}{q}, \quad Q = \frac{\partial G}{\partial P} = \log q,$$

che si può invertire in:

$$\begin{cases} Q = \log q, \\ P = qp, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = e^Q, \\ p = P e^{-Q}, \end{cases}$$

che è proprio la trasformazione canonica richiesta.

(c) L'Hamiltoniana nelle nuove variabili è

$$\tilde{H}(Q, P) = \frac{P^2}{2} + Q,$$

le cui equazioni di Hamilton sono:

$$\begin{cases} \dot{Q} = P, \\ \dot{P} = -1. \end{cases}$$

(d) La soluzione alle equazioni di Hamilton nelle variabili (Q, P) è

$$P(t) = P(0) - t, \quad Q(t) = Q(0) + P(0)t - \frac{t^2}{2}.$$

I dati iniziali nelle variabili (Q, P) corrispondenti a $q(0) = p(0) = 1$ sono: $Q(0) = \log 1 = 0$ e $P(0) = 1$. La soluzione $(Q(t), P(t))$ con tale dato iniziale è quindi

$$Q(t) = t - \frac{t^2}{2}, \quad P(t) = 1 - t.$$

La soluzione nelle variabili originali è

$$q(t) = e^{Q(t)} = e^{t-t^2/2}, \quad p(t) = (1-t)e^{-t+t^2/2}.$$

Per verificare che tale legge oraria soddisfa le equazioni di Hamilton originali, calcoliamo le derivate:

$$\begin{aligned} \dot{q}(t) &= (1-t)e^{t-t^2/2} \stackrel{?}{=} q^2(t)p(t), \\ \dot{p}(t) &= -e^{-t+t^2/2} - (1-t)^2e^{-t+t^2/2} \stackrel{?}{=} -q(t)p^2(t) - \frac{1}{q(t)}. \end{aligned}$$

Usando che $q(t) = e^{t-t^2/2}$ e $p(t) = (1-t)e^{-t+t^2/2}$ si verifica immediatamente che tali relazioni sono verificate, come desiderato.

ESERCIZIO 3. Si consideri la Lagrangiana $\mathcal{L}(q, \dot{q}) = q\dot{q}^2$

1. Per quali valori di q la Lagrangiana \mathcal{L} è regolare?
2. Determinare l'Hamiltoniana associata e le corrispondenti equazioni di Hamilton.
3. Si dimostri che la trasformazione di coordinate

$$\begin{cases} Q = \frac{p^2}{4q} \\ P = -\frac{4q^2}{3p} \end{cases}$$

è canonica, mostrando che è la trasformazione associata alla funzione generatrice di seconda specie $F(q, P) = -\frac{4}{9}\frac{q^3}{P}$. Su quale dominio è definita la trasformazione?. Determinare l'Hamiltoniana nelle nuove coordinate.

4. Usare la trasformazione canonica del punto precedente per risolvere le equazioni del moto con dato iniziale $q(0) = 1, \dot{q}(0) = 2/3$.

SOLUZIONE. Si veda la soluzione all'esercizio 3 del tutorato 11 del corso di Meccanica Analitica, A.A.2014/15, disponibile al link:

http://www.mat.uniroma3.it/users/giuliani/public_html/didattica/MA_2015/soluzioni_11.pdf