FM210 - Fisica Matematica 1

Tutorato 8 (21-05-2019)

ESERCIZIO 1. Per $q > 0$ si consideri la lagrangiana

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \frac{\dot{q}^2}{2q^2} - \log q$$

1. Determinare l'Hamiltoniana.
2. Determinare le equazioni di Hamilton.
3. Determinare la trasformazione canonica generata dalla funzione generatrice di seconda specie $F(q, P) = P \log q$.
4. Usare la trasformazione canonica trovata al punto precedente per integrare le equazioni del moto con dati iniziali $q(0) = 1$, $p(0) = 0$.

ESERCIZIO 2. Si consideri l'Hamiltoniana

$$H = \frac{p^2}{2} e^{-2q}$$

1. Determinare le equazioni del moto.
2. Determinare la Lagrangiana associata.
3. Determinare la trasformazione canonica generata dalla funzione generatrice di prima specie $F(q, Q) = Q^2 e^q$ e determinare la nuova Hamiltoniana.
4. Usare la trasformazione canonica trovata al punto precedente per risolvere le equazioni con dati iniziali $q(0) = 0$, $p(0) = 1$.

ESERCIZIO 3. Si consideri la Lagrangiana $\mathcal{L}(q, \dot{q}) = q\dot{q}^2$

1. Per quali valori di q la Lagrangiana $\mathcal{L}$ è regolare?
2. Determinare l'Hamiltoniana associata e le corrispondenti equazioni di Hamilton.
3. Si dimostri che la trasformazione di coordinate

$$\begin{cases} Q = \frac{p^2}{4q} \\ P = -\frac{4q^2}{3p} \end{cases}$$

   è canonica, mostrando che è la trasformazione associata alla funzione generatrice di seconda specie $F(q, P) = -\frac{4}{9}\frac{q^3}{P}$. Su quale dominio è definita la trasformazione?. Determinare l'Hamiltoniana nelle nuove coordinate.
4. Usare la trasformazione canonica del punto precedente per risolvere le equazioni del moto con dato iniziale $q(0) = 1$, $\dot{q}(0) = 2/3$.

Seconda prova pre-esonero (prima parte)

1. Un sistema meccanico è costituito da due sbarre uguali AB e BC, rettilinee, omogenee, di massa M e lunghezza ℓ, incernierate tra loro in B. Le due sbarre sono vincolate a muoversi in un piano verticale, mantenendo i loro estremi A e C sull'asse orizzontale x. Oltre alla forza peso, sul sistema agiscono due forze elastiche di costante elastica k: la prima, di centro $O = (0, 0)$, agisce su A, mentre la seconda, di centro $Q = (2\ell, 0)$, agisce su C. Si usino come coordinate Lagrangiane l'angolo θ che la sbarra AB forma con la verticale discendente, misurato in senso antiorario, e l'ascissa x del punto B. Si suppongano tutti i vincoli come ideali.

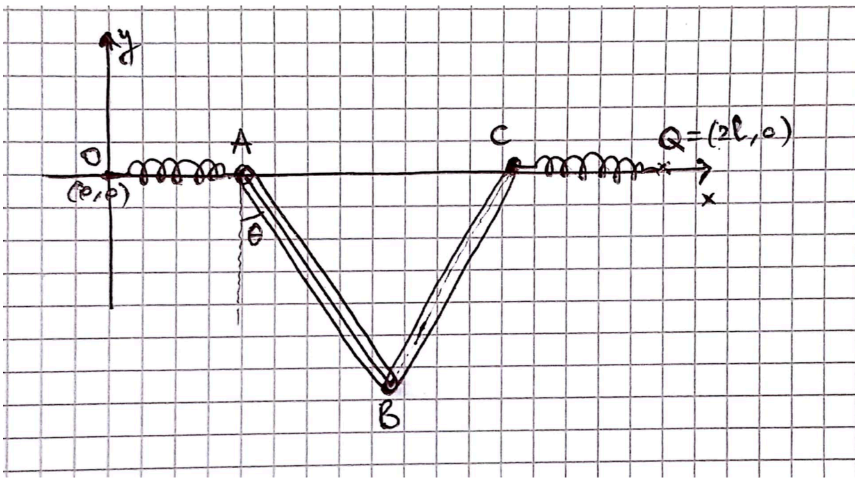

Figura 1: Il sistema di due aste vincolato descritto nel testo.

   (a) Scrivere la Lagrangiana del sistema e le equazioni di Eulero-Lagrange.
   (b) Determinare i punti di equilibrio e studiarne la stabilità.
   (c) Si integri il moto per quadrature (più precisamente, si calcoli esplicitamente il moto di x e si riduca alla quadrature quello di θ) e se ne discuta la natura qualitativa.