Fisica Matematica 1

Tutorato 10 (28-05-2019)

Esercizio 1

1. Data l'Hamiltoniana
$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + U(\mathbf{q})$$
con $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in \mathbb{R}^6$, si verifichi che, se $U(\mathbf{q})$ è invariante rispetto a rotazioni attorno all'asse $\hat{e}_3$ (i.e., $U(\mathbf{q}) = V(\sqrt{q_1^2 + q_2^2}, q_3)$, per un'opportuna funzione V), allora la parentesi di Poisson di H con la terza componente del momento angolare $l_3 = (\mathbf{q} \wedge \mathbf{p})_3 = q_1 p_2 - q_2 p_1$ è uguale a zero.

2. Si verifichi che $\{l_1, l_2\} = l_3$, $\{l_2, l_3\} = l_1$, $\{l_3, l_1\} = l_2$. Si dimostri quindi che se il potenziale U dell'Hamiltoniana al punto precedente è invariate per rotazioni sia attorno all'asse $\hat{e}_3$, che attorno all'asse $\hat{e}_1$, allora tutte e tre le componenti di $\mathbf{l} = \mathbf{q} \wedge \mathbf{p}$ sono integrali primi del moto.

Esercizio 2

Per $q > 0$ si consideri la Lagrangiana
$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2q^2}\left[1 + \left(\frac{\dot{q}}{q^2}\right)^2\right]$$

1. Determinare l'Hamiltoniana.
2. Determinare le equazioni di Hamilton.
3. Si determini la trasformazione canonica associata alla funzione generatrice di seconda specie $S(q, P) = \frac{P}{2q^2}$ e si calcoli l'Hamiltoniana nelle nuove variabili (Q, P), nonchè le nuove equazioni di Hamilton.
4. Si usino le nuove variabili per risolvere il moto corrispondente ai dati iniziali $q(0) = 1, p(0) = 0$.
5. Si verifichi esplicitamente che tale soluzione risolve le equazioni di Eulero-Lagrange per la Lagrangiana originale.

Esercizio 3

Si consideri la Lagrangiana
$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \frac{\dot{q}^2 q^4}{2} - \frac{q^3}{3}$$

1. Determinare l'Hamiltoniana.
2. Determinare le equazioni di Hamilton.
3. Si determini la trasformazione canonica associata alla funzione generatrice di seconda specie $S(q, P) = \frac{Pq^3}{3}$ e si calcoli l'Hamiltoniana nelle nuove variabili (Q, P), nonchè le nuove equazioni di Hamilton.
4. Si usino le nuove variabili per risolvere il moto corrispondente ai dati iniziali $q(0) = 1, p(0) = 0$.
5. Si verifichi esplicitamente che tale soluzione risolve le equazioni di Eulero-Lagrange per la Lagrangiana originale.

Esercizio 4

Si considerino le equazioni del moto

$$\begin{cases} \dot{q} = q^2 p \\ \dot{p} = -p^2 q - 1/q, \end{cases}$$

per $q > 0$ e $p \in \mathbb{R}$.

(a) Si riconosca che tale sistema di equazioni è Hamiltoniano e si determini l'Hamiltoniana corrispondente.

(b) Si calcoli la trasformazione canonica associata alla funzione generatrice di seconda specie $G(q, P) = P \log q$

(c) Si determini l'Hamiltoniana nelle nuove variabili Q, P. Si calcolino e risolvano le corrispondenti equazioni di Hamilton.

(d) Si usi la trasformazione determinata sopra, nonché la soluzione delle equazioni del moto nelle variabili (Q, P), per risolvere le equazioni del moto originali per le variabili (q, p), in corrispondenza dei dati iniziali $q(0) = p(0) = 1$. Si verifichi esplicitamente che la soluzione trovata risolve le equazioni del moto originali.