FM210 FISICA MATEMATICA 1
TUTORATO 2 (12-03-2019)

Esercizio 1 Considerare il moto di un punto materiale di massa $m = 1$ soggetto ad un potenziale $V(x)$:

$$\ddot{x} = -V'(x),$$

dove $V(x) = x^3 - x$.

1. Scrivere esplicitamente l'equazione del moto e verificare esplicitamente la conservazione dell'energia meccanica $E = \dot{x}^2/2 + V(x)$.

2. Studiare qualitativamente il moto, procedendo nel modo seguente:

   (a) Si disegni il grafico dell'energia potenziale.

   (b) Si identifichino due punti di equilibrio, $x_1 < x_2$, e se ne discuta la stabilità. Per il punto di equilibrio stabile, corrispondente a un minimo non degenere del potenziale, si calcoli la frequenza delle piccole oscillazioni.

   (c) Si identifichino i *valori critici dell'energia*, i.e., i valori dell'energia E_1, E_2 corrispondenti ai punti di equilibrio x_1, x_2. Si disegnino le curve di livello Σ_E al variare dell'energia E: si inizino a disegnare Σ_{E_1} e Σ_{E_2}, e poi le curve corrispondenti a valori rappresentativi di E (una per $E > E_1$, una per $E_2 < E < E_1$, una per $E < E_2$).

   (d) Si identifichino i dati iniziali corrispondenti a (qualora esistano) moti periodici, moti aperti, moti chiusi aperiodici.

3. Calcolare il periodo dei moti periodici in forma di integrale definito.

4. Si fissi un dato iniziale corrispondente ad un moto aperto: il tempo in cui il punto raggiunge l'infinito è finito o no? Il moto esiste globalmente?

5. Si risolva *esplicitamente* il moto sulla separatrice

Esercizio 2 (Lennard - Jones) Considerare il moto di un punto materiale di massa m

$$m\ddot{x} = -V'(x), \tag{1}$$

soggetto ad un potenziale

$$V(x) = V_0\left(\left(\frac{x_0}{x}\right)^{12} - \left(\frac{x_0}{x}\right)^{6}\right) \tag{2}$$

dove $V_0, x_0 > 0$.

1. Studiare qualitativamente il moto, procedendo come descritto nell'esercizio 1 (si disegni il grafico di V, quindi delle curve di livello al variare di E, etc.)

2. Scrivere il periodo dei moti periodici in forma di integrale definito.

3. Scelto un dato iniziale x_i corrispondente ad un moto aperto: il tempo che il sistema impiega per arrivare da x_i a infinito è finito o no? Il moto è definito globalmente?

Esercizio 3 Considerare il moto di un punto materiale di massa $m = 1$ soggetto ad un potenziale $V(x)$:

$$\ddot{x} = -V'(x),$$

dove $V(x) = -\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}$.

- Studiare qualitativamente il moto, procedendo come descritto nell'esercizio 1
- Calcolare il periodo dei moti periodici in forma di integrale definito.
- Si fissi un dato iniziale corrispondente ad un moto aperto: il tempo in cui il punto raggiunge l'infinito è finito o no? Il moto esiste globalmente?
- Si risolva *esplicitamente* il moto sulla separatrice

Esercizio 4 Considerare il moto di un punto materiale di massa $m = 1$ soggetto ad un potenziale $V(x)$

$$\ddot{x} = x(1 + x^2)^\alpha \tag{3}$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Studiare qualitativamente il moto, procedendo come descritto nell'esercizio 1
2. Si discuta al variare di α se le soluzioni aperte (i.e., tali che $x(t)$ non rimane limitato) sono globali nel tempo o no.

Esercizio 5 Considerare il moto di un punto materiale di massa $m = 1$

$$\ddot{x} = -V'(x), \tag{4}$$

soggetto ad un potenziale

$$V(x) = \begin{cases} x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ per } x \neq 0 \\ 0 \text{ se } x = 0 \end{cases} \tag{5}$$

1. Studiare qualitativamente il moto, procedendo come descritto sopra.
2. Discutere la stabilità del punto $(0, 0)$.

Esercizio 6 Considerare il moto di un punto materiale di massa $m = 1$ soggetto ad un potenziale $V(x)$:

$$\ddot{x} = -V'(x),$$

dove $V(x) = -\frac{1}{2}e^{x^2}$.

1. Studiare qualitativamente il moto, procedendo come descritto sopra.
2. Calcolare il periodo dei moti periodici in forma di integrale definito.
3. Si fissi un dato iniziale corrispondente ad un moto aperto: il tempo in cui il punto raggiunge l'infinito è finito o no? Il moto esiste globalmente?