Soluzioni 3° tutorato (19.3.19) FM210 (2018/2019)

Esercizio 1

a)
Una costante del moto per il sistema é: $E(x,\dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x)$, con V(x) tale che $f(x) = -\frac{\partial V}{\partial x}$.
Nel nostro caso avremo dunque:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\int f(x)\mathrm{d}x = -2xe^{x^2}\mathrm{d}x = -e^{x^2}$$

quindi: $E(x,\dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - e^{x^2}$

b)
I punti di equilibrio del sistema sono i punti x tali che $f(x) = 0$.
Nel nostro caso avremo dunque:
$f(x) = 2xe^{x^2} = 0 \Rightarrow x = 0$ é un punto di equilibrio per il sistema.

c)
Sia $\bar{t}$ il tempo impiegato per andare da un punto $(x(0), \dot{x}(0)) = (\varepsilon, 0)$ all'infinito. Integrando per separazioni di variabili la legge di conservazione trovata, esattamente come nell'es 2, otteniamo:

$$\bar{t} = \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2(E_0 + e^{x^2})}} < \infty$$

essendo quest'ultimo un integrale convergente.

Ma allora abbiamo appena trovato una soluzione che parte vicino al punto di equilibrio $x(0) = 0$ e che in tempo finito si allontana all'infinito; quindi il punto di equilibrio é un punto instabile.

Esercizio 2 Si consideri l'equazione del moto per un punto materiale di massa $m = 1$ su $\mathbb{R}$,

$$\ddot{x} = 2\alpha x(x^2+1)^{\alpha-1} \; ,$$

con $\alpha > 0$.

- Si determini una grandezza conservata del moto.
- Si disegnino le traiettorie del sistema nel piano delle fasi e si scriva la soluzione per quadrature.
- Si stabilisca se, al variare di $\alpha > 0$, il moto esiste globalmente o no.

Soluzione:

1 - Definiamo l'energia potenziale

$$U(x) := -(x^2+1)^{\alpha}$$

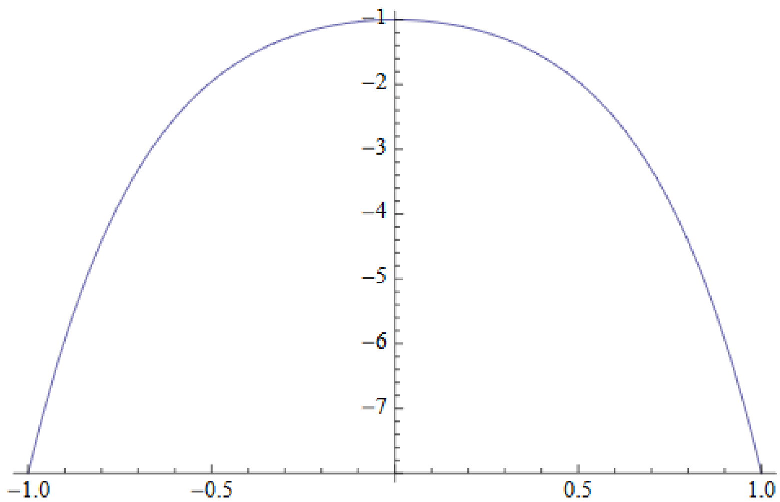
e l'energia

$$E := \frac{1}{2}\dot{x}^2 + U(x).$$

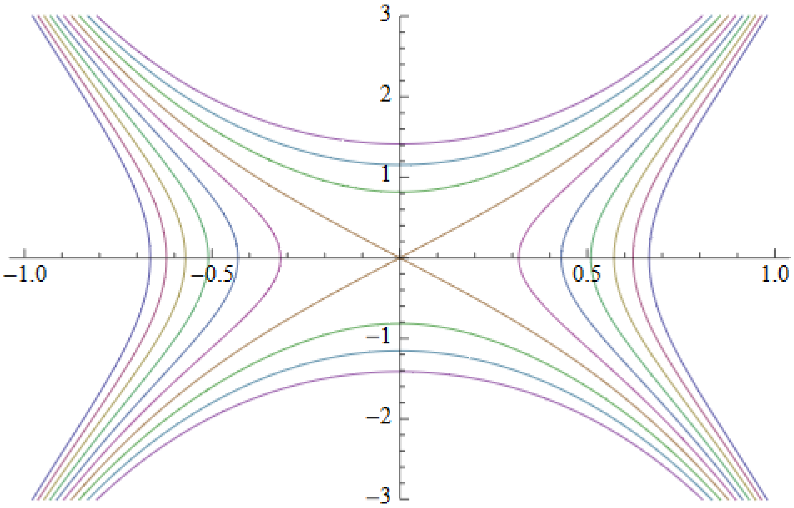
Abbiamo

$$\dot{E} = \dot{x}\left(\ddot{x} - 2\alpha x(x^1+1)^{\alpha-1}\right) = 0.$$

2 - Il grafico dell'energia potenziale avra la seguente forma (in figura è rappresentato il caso $\alpha = 3$, ma per diversi valori di α il grafico ha lo stesso comportamento qualitativo):



quindi le curve di livello nello spazio delle fase sono dalla forma:



Inoltre, dato un'energia E, il tempo necessario per andare da x_0 a x_1 su una porzione di curva di livello sul semipiano superiore (una formula analoga, a meno del segno, è valida per le porzioni di curva nel semipiano inferiore) è

$$\tau(x_0, x_1) = \int_{x_0}^{x_1} dx \, \frac{1}{\sqrt{2(E + (x^2+1)^\alpha)}}.$$

3 - Il tempo per arivare ad $x = \infty$ è

$$\tau_\infty(x_0) = \int_{x_0}^{\infty} dx \, \frac{1}{\sqrt{2(E + (x^2+1)^\alpha)}}.$$

e

$$E + (x^2+1)^\alpha \underset{x\to\infty}{\sim} x^{2\alpha}$$

quindi $\tau_\infty(x_0)$ è finito se e solo se $\alpha > 1$. Quindi il moto esiste globalmente se e solo se $\alpha \leqslant 1$.

3 - Il tempo per arivare ad $x = \infty$ è

$$\tau_\infty(x_0) = \int_{x_0}^{\infty} dx \, \frac{1}{\sqrt{2(E + (x^2+1)^\alpha)}}.$$

e

$$E + (x^2+1)^\alpha \underset{x\to\infty}{\sim} x^{2\alpha}$$

quindi $\tau_\infty(x_0)$ è finito se e solo se $\alpha > 1$. Quindi il moto esiste globalmente se e solo se $\alpha \leqslant 1$.

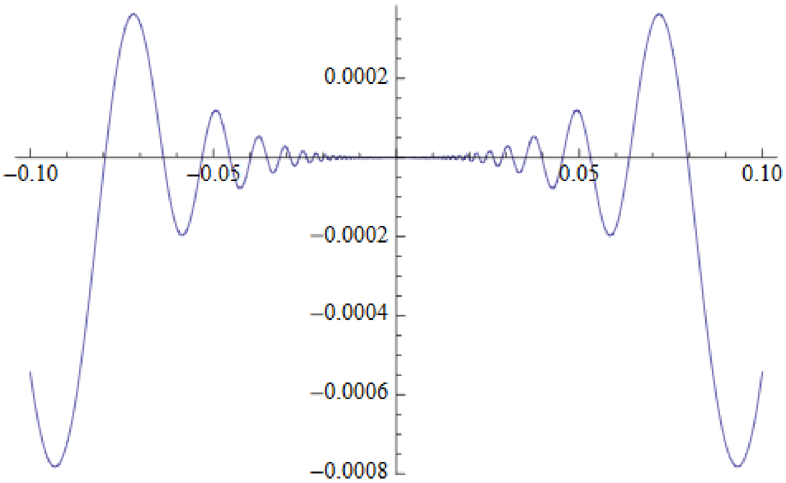
<u>Esercizio 3</u> Si consideri l'equazione del moto per un punto materiale di massa $m = 1$ su $\mathbb{R}$,

$$\ddot{x} = -U'(x)\,, \qquad U(x) = \begin{cases} x^3 \sin(1/x) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

- Si disegni il grafico di $U(x)$.
- Si disegnino le traiettorie del sistema nel piano delle fasi.
- Si dimostri che il punto di equilibrio $x = 0$ è stabile, pur non essendo un minimo isolato locale di U.

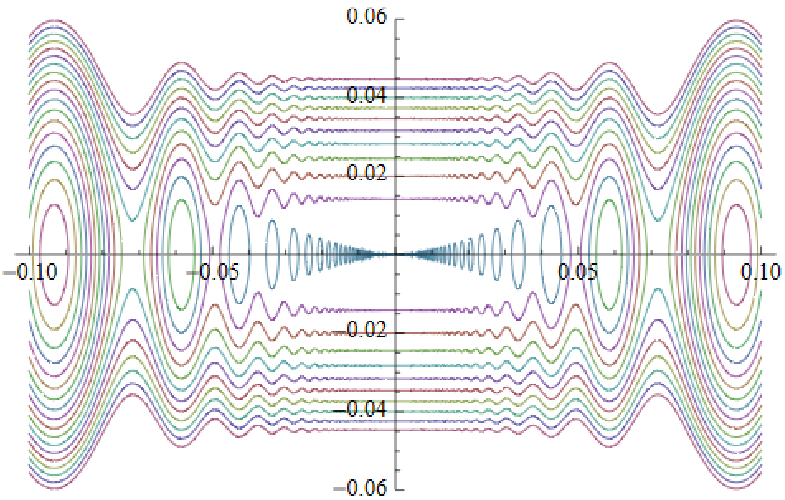
Soluzione:

1 - Il grafico di $U(x)$ è



Le oscillazioni (e quindi i punti di equilibrio) si accumulano a 0.

2 - Quindi le traiettorie nel piano delle fasi sono dalla forma



3 - Ricordiamo la definizione della stabilità secondo Lyapunov: per ogni intorno I del punto di equilibrio sul piano delle fasi, trovo un intorno $I' \subset I$ tale che, scelto un qualsiasi dato iniziale in I', il moto corrispondente rimane in I per tutti i tempi $t \geq 0$. Dallo studio delle curve di livello, risulta che esistono curve di livello concentriche attorno all'origine piccole a piacere. Piú precisamente, scelta un'energia non critica positiva, la Σ_E corrispondente è costituita da varie componenti sconnesse, una sola delle quali contiene (strettamente) l'origine: chiamiamo questa $\tilde{\Sigma}_E$. Per $E < E'$ entrambe non critiche, $\tilde{\Sigma}_E$ è completamente contenuta in $\tilde{\Sigma}_{E'}$. Inoltre l'intera curva chiusa $\tilde{\Sigma}_E$ tende a zero nel limite $E \to 0^+$. La dimostrazione dettagliata di queste affermazioni viene lasciata al lettore, e segue dallo studio del grafico di Σ_E.

Dato I intorno di $(0,0)$ scegliamo allora I' come l'interno di una di queste $\tilde{\Sigma}_E$, con E cosí piccolo che I' sia contenuto in I. Per quanto discusso sopra questo è possibile. Essendo I' cosí

scelto invariante lungo il moto, (i.e. $(x(t), \dot{x}(t))$ rimane in I' per tutti i tempi, se parte in I'), segue la stabilità dell'origine.

<u>Esercizio 4</u>

1 - L'energia

$$E = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + U(x) := \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{x^{12}} - \frac{1}{x^6}$$

è conservata:

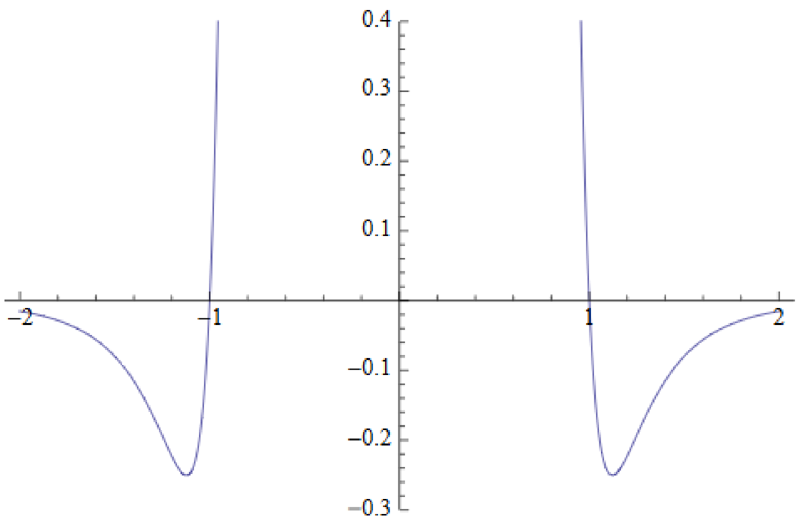
$$\dot{E} = \dot{x}\left(\ddot{x} - \frac{12}{x^{13}} + \frac{6}{x^7}\right) = 0.$$

Questa energia potenziale si chiama il *potenziale di Lennard-Jones*.

2 - Le curve di livello per una energia E fissata sono determinate da

$$\dot{x}(x) = \pm\sqrt{2(E - U(x))} = \pm\sqrt{2\left(E - \frac{1}{x^{12}} + \frac{1}{x^6}\right)}.$$

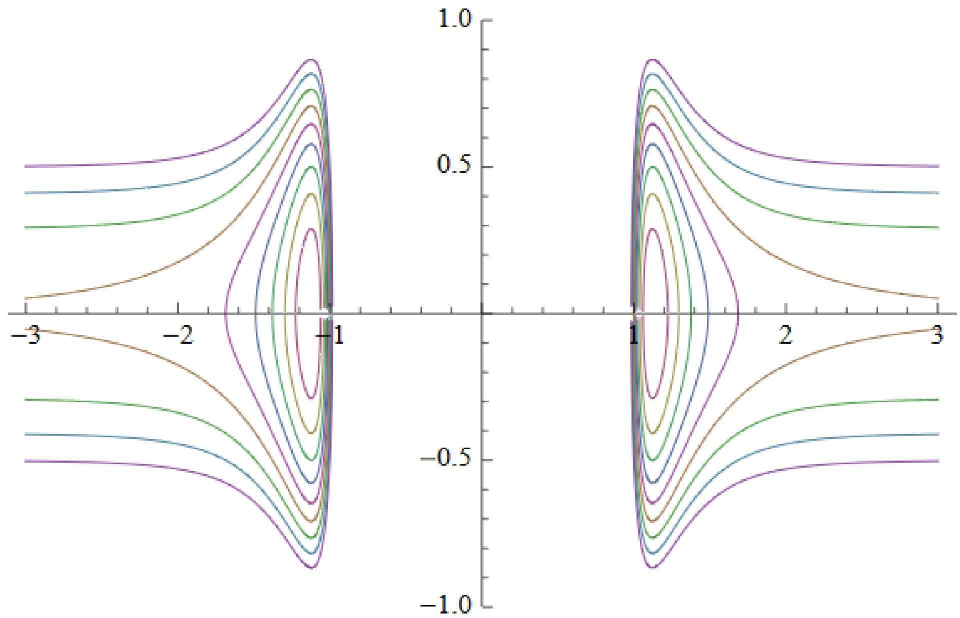
Il grafico di $U(x)$ è



$U(x)$ ha un minimo in $x_\pm := \pm 2^{1/6}$, $U(x_\pm) = -1/4$, $\lim_{x\to\pm\infty} U(x) = 0$ e $\lim_{x\to 0} U(x) = \infty$; inoltre U decresce in $(-\infty, x_-)$, cresce in $(x_-, 0)$, decresce in $(0, x_-)$ e cresce in (x_-, ∞). Quindi

- se $E < -1/4$ allora $\dot{x}(x)$ non è definito.
- se $-1/4 < E < 0$, $\dot{x}(x)$ è definito per $x \in [x_E^{(-)}, x_E^{(+)}]$ e per $x \in [-x_E^{(+)}, -x_E^{(-)}]$ dove $\pm x_E^{(\pm)}$ sono le quattro soluzioni di $U(\pm x_E^{(\pm)}) = E$. Poichè $U'(\pm x_E^{(\pm)}) \neq 0$, abbiamo $\dot{x}'(\pm x_E^{(\pm)}) = \pm\infty$.
- se $E > 0$, $\dot{x}(x)$ è definito per $x \geqslant x_E$ e per $x \leqslant -x_E$ dove $\pm x_E$ sono le due soluzioni di $U(\pm x_E) = E$, e $\dot{x}'(x_E) = \pm\infty$. Inoltre $\dot{x} \to \pm 1/\sqrt{2E}$ quando $x \to \pm\infty$.
- se $E = 1/4$, $\dot{x}(x)$ è definito solamente per $x = \pm 2^{1/6}$, quindi $\dot{x}(x) = \dot{x}(\pm 2^{1/6}) = 0$.
- se $E = 0$, $\dot{x}(x)$ è definito per $x \in [x_E, \infty)$ e per $x \in (-\infty, -x_E]$ dove $\pm x_E$ sono le due soluzioni di $U(\pm x_E) = E$, $\dot{x}'(\pm x_E) = \pm\infty$. Inoltre $\dot{x} \sim x^{-3}$ quando $x \to \pm\infty$.

Le curve di livello avranno la forma di quelle disegnate nel seguente grafico:



Le curva gialla si chiama la *separatrice*.

3 - Usando il ragionamento della domanda precedente, troviamo che

- se $-1/4 < E < 0$ il moto è periodico.
- se $E > 0$ il moto è aperto, e tende a un moto *ballistico* dove la velocita è costante.
- se $E = -1/4$, il moto è costante.
- se $E = 0$ è aperto, ma la velocità decade come x^{-3}.

4 - Consideriamo il limite delle piccole oscillazioni: prendiamo $E = -1/4 + \epsilon^2$ per ϵ piccolo. Il periodo del moto è

$$T = \sqrt{2} \int_{x_E^{(-)}}^{x_E^{(+)}} dx \, \frac{1}{\sqrt{E + x^2 \left(\frac{x}{3} - \frac{1}{2}\right)}}$$

dove $\pm x_E^{(\pm)}$ sono le quattro soluzioni di $U(\pm x_E^{(\pm)}) = E$. Cambiamo variabili passando a $u := x_E^{(-)} + (x_E^{(+)} - x_E^{(-)})u$:

$$T = \sqrt{2}(x_E^{(+)} - x_E^{(-)}) \int_0^1 du \, \frac{1}{\sqrt{E - U\left(x_E^{(-)} + (x_E^{(+)} - x_E^{(-)})u\right)}}$$

Abbiamo

$$\frac{1}{(x_E^{(\pm)})^6} = \frac{1}{2} \pm \epsilon$$

quindi

$$x_E^{(\pm)} = 2^{1/6}\left(1 \mp \frac{\epsilon}{3}\right) + O(\epsilon^2)$$

e

$$U(2^{1/6}(1+t)) = -\frac{1}{4} + 9t^2 + O(t^3)$$

quindi

$$T = 2^{5/3}\epsilon \int_0^1 du \, \frac{1}{\sqrt{\epsilon^2 4u(1-u) + O(\epsilon^3)}} = 2^{2/3} \int_0^1 du \, \frac{1}{\sqrt{u(1-u)}} + O(\epsilon)$$

cambiamo variabili passando a $v := \sqrt{u}$:

$$\lim_{\epsilon \to 0} T = 2^{5/3} \int_0^1 dv \, \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}} = 2^{2/3}\pi.$$