

FM210 FISICA MATEMATICA 1
TUTORATO 3 (19-03-2019)

Esercizio 1 Si consideri il sistema meccanico unidimensionale con $x \in \mathbb{R}$

$$\ddot{x} = 2x \exp\{x^2\}.$$

- a) Si trovi una costante del moto.
- b) Si trovi un punto di equilibrio del sistema.
- c) Integrando per separazione di variabili la legge di conservazione trovata, si calcoli in termini di un integrale definito il tempo necessario affinché il moto con dato iniziale $(x(0), \dot{x}(0)) = (\varepsilon, 0)$ arrivi all'infinito. Si usi tale informazione per discutere la stabilità del punto di equilibrio.

Esercizio 2 Si consideri l'equazione del moto per un punto materiale di massa $m = 1$ su $\mathbb{R}$,

$$\ddot{x} = 2\alpha x(x^2 + 1)^{\alpha-1},$$

con $\alpha > 0$.

- Si determini una grandezza conservata del moto.
- Si disegnino le traiettorie del sistema nel piano delle fasi e si scriva la soluzione per quadrature.
- Si stabilisca se, al variare di $\alpha > 0$, il moto esiste globalmente o no.

Esercizio 3 Si consideri l'equazione del moto per un punto materiale di massa $m = 1$ su $\mathbb{R}$,

$$\ddot{x} = -U'(x), \quad U(x) = \begin{cases} x^3 \sin(1/x) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

- Si disegni il grafico di $U(x)$.
- Si disegnino le traiettorie del sistema nel piano delle fasi.
- Si dimostri che il punto di equilibrio $x = 0$ è stabile, pur non essendo un minimo isolato locale di U .

Esercizio 4 Si consideri l'equazione del moto per un punto materiale di massa $m = 1$ su $\mathbb{R}$,

$$\ddot{x} = \frac{12}{x^{13}} - \frac{6}{x^7}$$

- Si determini una grandezza conservata del moto
- Si disegnino le curve di livello corrispondenti nel piano delle fasi
- Si identifichino i dati iniziali corrispondenti a moti periodici e a moti aperti
- Si calcoli il limite di tale periodo nel limite di piccole oscillazioni, i.e., nel limite in cui l'ampiezza delle oscillazioni tende a 0.
- Si risolva esplicitamente il moto con dato iniziale $(x(0), \dot{x}(0)) = (1, 0)$.