

FM210 / MA

TERZO SCRITTO [13-9-2018]

1. Un sistema meccanico è costituito da una sbarra rettilinea, omogenea, pesante, di massa M e lunghezza ℓ , vincolata a muoversi su un piano verticale, in modo tale che l'estremo A appartenga a una guida parabolica di equazione $y = \frac{x^2}{2\ell}$. Oltre alla forza gravitazionale, il sistema è soggetto a una forza elastica che agisce su B , della forma $\vec{F} = -k \overrightarrow{B'B}$, dove B' è il punto dell'asse verticale passante per O con la stessa ordinata di B (i.e., è la proiezione ortogonale di B sull'asse verticale passante per O).

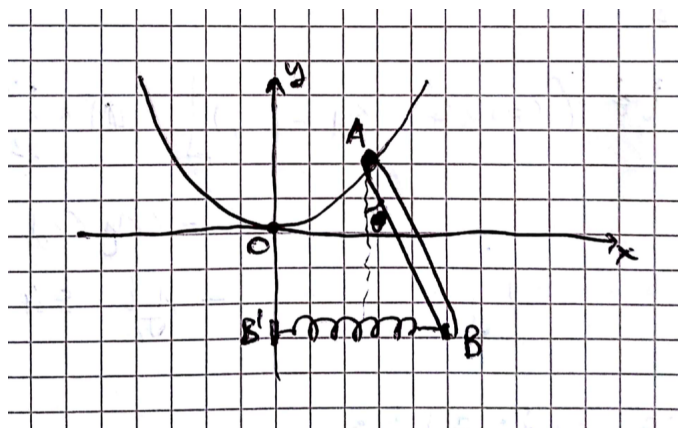


Figura 1: Il sistema di due aste vincolato descritto nel testo.

Tutti i vincoli sono supposti ideali. Si usino come coordinate Lagrangiane l'ascissa x del punto A e l'angolo θ mostrato in figura.

- Scrivere la Lagrangiana del sistema e le equazioni di Eulero-Lagrange.
- Riconoscere che i punti $(x, \theta) = (0, 0), (0, \pi)$ sono punti di equilibrio, e studiarne la stabilità, al variare di k .
- Determinare gli eventuali altri punti di equilibrio, al variare di k , e (**facoltativo**) studiarne la stabilità.
- Si scelga un punto di equilibrio stabile e si ricavino le equazioni del moto linearizzate attorno a tale punto di equilibrio (equazione delle piccole oscillazioni). Si determinino le frequenze proprie delle piccole oscillazioni.

SOLUZIONE.

- Per scrivere la Lagrangiana del sistema occorre calcolare l'energia cinetica e potenziale del sistema nella coordinata Lagrangiane θ assegnata.

Energia cinetica. Grazie al teorema di König, l'energia cinetica dell'asta è uguale alla somma dell'energia cinetica traslazionale associata al moto del centro di massa e dell'energia cinetica di rotazione attorno al centro di massa. Il punto A ha coordinate $\mathbf{x}_A = (x, \frac{x^2}{2\ell})$, mentre il punto B ha coordinate $\mathbf{x}_B = (x + \ell \sin \theta, \frac{x^2}{2\ell} - \ell \cos \theta)$, cosicché il centro di massa G ha coordinate $\mathbf{x}_G = (x + \frac{\ell}{2} \sin \theta, \frac{x^2}{2\ell} - \frac{\ell}{2} \cos \theta)$. La velocità del centro di massa è quindi $\dot{\mathbf{x}}_G = \dot{x}(1, \frac{x}{\ell}) + \frac{\ell}{2}\dot{\theta}(\cos \theta, \sin \theta)$. Quindi l'energia cinetica dell'asta è

$$\begin{aligned} T &= \frac{M}{2}|\dot{\mathbf{x}}_G|^2 + \frac{1}{2}I_G\dot{\theta}^2 = \\ &= \frac{M}{2}\left[\dot{x}^2\left(1 + \frac{x^2}{\ell^2}\right) + \frac{\ell^2}{4}\dot{\theta}^2 + \ell\dot{x}\dot{\theta}(\cos \theta + \frac{x}{\ell}\sin \theta)\right] + \frac{1}{2}\frac{M\ell^2}{12}\dot{\theta}^2 \\ &= \frac{M}{2}\dot{x}^2\left(1 + \frac{x^2}{\ell^2}\right) + M\frac{\ell^2}{6}\dot{\theta}^2 + \frac{M}{2}\ell\dot{x}\dot{\theta}(\cos \theta + \frac{x}{\ell}\sin \theta), \end{aligned}$$

dove il termine $\frac{1}{2}I_G\dot{\theta}^2$ rappresenta l'energia cinetica di rotazione attorno al centro di massa, e abbiamo usato che $I_G = \frac{1}{12}M\ell^2$.

Energia potenziale. L'energia potenziale è la somma dell'energia potenziale gravitazionale dell'asta più l'energia potenziale elastica della molla:

$$\begin{aligned} U &= Mg\left(\frac{x^2}{2\ell} - \frac{\ell}{2}\cos \theta\right) + \frac{1}{2}k(x + \ell \sin \theta)^2 \\ &= \frac{1}{2}\left(k + \frac{Mg}{\ell}\right)x^2 + k\ell x \sin \theta - \frac{Mg\ell}{2}\cos \theta + \frac{1}{2}k\ell^2 \sin^2 \theta, \end{aligned} \quad (1)$$

dove abbiamo usato che: la coordinata verticale di $\mathbf{x}_G$ è $\frac{x^2}{2\ell} - \frac{\ell}{2}\cos \theta$; la coordinata orizzontale di $\mathbf{x}_B$ è $x + \ell \sin \theta$.

La Lagrangiana del sistema è uguale all'energia cinetica meno l'energia potenziale. Quindi,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x, \theta, \dot{x}, \dot{\theta}) &= \frac{M}{2}\dot{x}^2\left(1 + \frac{x^2}{\ell^2}\right) + M\frac{\ell^2}{6}\dot{\theta}^2 + \frac{M}{2}\ell\dot{x}\dot{\theta}(\cos \theta + \frac{x}{\ell}\sin \theta) \\ &\quad - \frac{1}{2}\left(k + \frac{Mg}{\ell}\right)x^2 - k\ell x \sin \theta + \frac{Mg\ell}{2}\cos \theta - \frac{1}{2}k\ell^2 \sin^2 \theta, \end{aligned}$$

cosicché le equazioni di Eulero-Lagrange sono:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left[M\dot{x}\left(1 + \frac{x^2}{\ell^2}\right) + \frac{M}{2}\ell\dot{\theta}(\cos \theta + \frac{x}{\ell}\sin \theta)\right] &= \\ &= M\dot{x}^2\frac{x}{\ell^2} + \frac{M}{2}\dot{x}\dot{\theta}\sin \theta - \left(k + \frac{Mg}{\ell}\right)x - k\ell \sin \theta. \\ \frac{d}{dt}\left[M\frac{\ell^2}{3}\dot{\theta} + \frac{M}{2}\ell\dot{x}(\cos \theta + \frac{x}{\ell}\sin \theta)\right] &= \\ &= \frac{M}{2}\ell\dot{x}\dot{\theta}(-\sin \theta + \frac{x}{\ell}\cos \theta) - k\ell x \cos \theta - \frac{Mg\ell}{2}\sin \theta - k\ell^2 \sin \theta \cos \theta. \end{aligned}$$

Calcolando esplicitamente le derivate a membro di sinistra, e dividendo per ℓ la seconda equazione, troviamo:

$$\begin{aligned} M\ddot{x}\left(1 + \frac{x^2}{\ell^2}\right) + \frac{M}{2}\ell\ddot{\theta}(\cos\theta + \frac{x}{\ell}\sin\theta) + \frac{M}{2}\ell\dot{\theta}^2(-\sin\theta + \frac{x}{\ell}\cos\theta) &= \\ &= -M\dot{x}^2\frac{x}{\ell^2} - \left(k + \frac{Mg}{\ell}\right)x - k\ell\sin\theta. \\ M\frac{\ell}{3}\ddot{\theta} + \frac{M}{2}\ddot{x}(\cos\theta + \frac{x}{\ell}\sin\theta) + \frac{M}{2\ell}\dot{x}^2\sin\theta &= \\ &= -kx\cos\theta - \frac{Mg}{2}\sin\theta - k\ell\sin\theta\cos\theta. \end{aligned}$$

(b) Il sistema di equazioni per i punti di equilibrio è

$$\begin{cases} \left(k + \frac{Mg}{\ell}\right)x + k\ell\sin\theta = 0, \\ kx\cos\theta + \frac{Mg}{2}\sin\theta + k\ell\sin\theta\cos\theta = 0, \end{cases} \quad (2)$$

che è evidentemente risolto da $(x, \theta) = (0, 0)$ e da $(x, \theta) = (0, \pi)$, il che dimostra che tali punti sono di equilibrio.

Per studiare la stabilità di tali punti andiamo a considerare la matrice Hessiana del potenziale $U = U(x, \theta)$ in eq.(1) calcolata nei punti $(0, 0)$ e $(0, \pi)$. Si ha (le potenze di ℓ inverse negli elementi 12, 21 e 22 della matrice sono scelti in modo tale che tutti gli elementi della matrice abbiano le stesse dimensioni fisiche):

$$\mathcal{H}(x, \theta) := \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} & \frac{1}{\ell} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial \theta} \\ \frac{1}{\ell} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial \theta} & \frac{1}{\ell^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k + \frac{Mg}{\ell} & k\cos\theta \\ k\cos\theta & -k\frac{x}{\ell}\sin\theta + \frac{Mg}{2\ell}\cos\theta + k(\cos^2\theta - \sin^2\theta) \end{pmatrix}.$$

Calcolando l'Hessiana in $(0, 0)$ troviamo

$$\mathcal{H}(0, 0) = \begin{pmatrix} k + \frac{Mg}{\ell} & k \\ k & \frac{Mg}{2\ell} + k \end{pmatrix},$$

che è definita positiva: di conseguenza, $(0, 0)$ è stabile per ogni scelta di $k > 0$. Se invece calcoliamo l'Hessiana in $(0, \pi)$ troviamo:

$$\mathcal{H}(0, \pi) = \begin{pmatrix} k + \frac{Mg}{\ell} & -k \\ -k & -\frac{Mg}{2\ell} + k \end{pmatrix},$$

che è definita positiva se e solo se il suo determinante è positivo, i.e., se

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{Mg}{\ell}\right)^2 + \frac{k}{2}\frac{Mg}{\ell} > 0.$$

Quindi, se $k > Mg/\ell$, il punto di equilibrio $(0, \pi)$ è stabile. Viceversa, se $k < Mg/\ell$ la matrice Hessiana ha un autovalore positivo e uno negativo, e il punto di equilibrio è instabile.

(c) Per identificare altri punti di equilibrio oltre $(0, 0)$ e $(0, \pi)$, studiamo il sistema (2) per $\sin\theta \neq 0$. In tal caso, rimpiazzando la soluzione della prima equazione nella seconda, e dividendo per $\sin\theta$, troviamo:

$$k\left(1 - \frac{k}{k + Mg/\ell}\right)\cos\theta + \frac{Mg}{2\ell} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos\theta = -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{Mg}{\ell k}\right),$$

che ammette due soluzioni distinte se e solo se $\frac{Mg}{\ell k} < 1$, i.e., $k > Mg/\ell$. In tal caso, i due punti di equilibrio aggiuntivi, oltre $(0, 0)$ e $(0, \pi)$, sono

$$(x, \theta) = \left(\pm \frac{\ell}{1 + \beta} \sin \alpha, \pi \pm \alpha \right),$$

dove $\beta = \frac{Mg}{\ell k}$ e $\alpha = \arccos \frac{1+\beta}{2}$.

- (d) Studiamo le piccole oscillazioni attorno a $(0, 0)$. Le equazioni del moto linearizzate attorno a tale punto di equilibrio sono:

$$\begin{aligned} M\ddot{x} + \frac{M}{2}\ell\ddot{\theta} &= -\left(k + \frac{Mg}{\ell}\right)x - k\ell\theta \\ M\frac{\ell}{3}\ddot{\theta} + \frac{M}{2}\ddot{x} &= -kx - \left(k + \frac{Mg}{2\ell}\right)\ell\theta. \end{aligned}$$

In forma matriciale tale sistema di equazioni prende la forma:

$$M \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 \end{pmatrix} \ddot{\mathbf{v}} = -k \begin{pmatrix} 1 + \beta & 1 \\ 1 & 1 + \beta/2 \end{pmatrix} \mathbf{v},$$

dove $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ \ell\theta \end{pmatrix}$ e, di nuovo, $\beta = \frac{Mg}{\ell k}$. Le frequenze proprie delle piccole oscillazioni sono $\omega_{\pm} = \sqrt{\lambda_{\pm}}$, dove $\lambda_{\pm}$ sono le due soluzioni del seguente polinomio caratteristico:

$$\det \left[k \begin{pmatrix} 1 + \beta & 1 \\ 1 & 1 + \beta/2 \end{pmatrix} - \lambda M \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 \end{pmatrix} \right] = 0.$$

Risolvendo tale equazione, si trova:

$$\lambda_{\pm} = \omega_0^2 \left[2 + 5\beta \pm \sqrt{4 + 2\beta + 19\beta^2} \right],$$

dove $\omega_0 = \sqrt{k/M}$.

2. Si consideri il sistema Hamiltoniano di Hamiltoniana

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2) = p_1^2 + \frac{1}{2}p_2^2 - p_1p_2 + \frac{1}{2}q_1^2 + q_2^2 + q_1q_2.$$

- (a) Scrivere le equazioni di Hamilton.
- (b) Determinare la trasformazione canonica tale che

$$Q_1 = q_1 + q_2, \quad Q_2 = q_2$$

e calcolarne l'inversa, identificando la funzione generatrice di seconda specie ad essa associata.

- (c) Usare la trasformazione canonica precedente per risolvere le equazioni del moto, per dati iniziali qualsiasi. Verificare esplicitamente che la soluzione trovata risolve le equazioni di Hamilton originali.

SOLUZIONE.

- (a) Le equazioni di Hamilton prendono la forma:

$$\begin{aligned}\dot{q}_1 &= \frac{\partial H}{\partial p_1} = 2p_1 - p_2 \\ \dot{q}_2 &= \frac{\partial H}{\partial p_2} = p_2 - p_1 \\ \dot{p}_1 &= -\frac{\partial H}{\partial q_1} = -q_1 - q_2 \\ \dot{p}_2 &= -\frac{\partial H}{\partial q_2} = -2q_2 - q_1.\end{aligned}$$

- (b) Cerchiamo la funzione generatrice di seconda specie $S(q_1, q_2, P_1, P_2)$ per la trasformazione canonica richiesta: si ha

$$Q_1 = \frac{\partial S}{\partial P_1}, \quad Q_2 = \frac{\partial S}{\partial P_2}, \quad p_1 = \frac{\partial S}{\partial q_1}, \quad p_2 = \frac{\partial S}{\partial q_2}.$$

Imponendo che $Q_1 = q_1 + q_2$ e $Q_2 = q_2$ troviamo

$$\frac{\partial S}{\partial P_1} = q_1 + q_2, \quad \frac{\partial S}{\partial P_2} = q_2.$$

Quindi, una possibile scelta per S è semplicemente:

$$S(q_1, q_2, P_1, P_2) = P_1(q_1 + q_2) + P_2q_2,$$

che è associata alla trasformazione

$$Q_1 = q_1 + q_2, \quad Q_2 = q_2, \quad p_1 = P_1, \quad p_2 = P_1 + P_2.$$

La trasformazione diretta è quindi

$$Q_1 = q_1 + q_2, \quad Q_2 = q_2, \quad P_1 = p_1, \quad P_2 = p_2 - p_1,$$

mentre l'inversa è

$$q_1 = Q_1 - Q_2, \quad q_2 = Q_2, \quad p_1 = P_1, \quad p_2 = P_1 + P_2.$$

- (c) Usando la trasformazione canonica inversa otteniamo l'Hamiltoniana nelle nuove variabili:

$$\tilde{H}(Q_1, Q_2, P_1, P_2) = H(Q_1 - Q_2, Q_2, P_1, P_1 + P_2).$$

Svolgendo l'espressione troviamo:

$$\tilde{H}(Q_1, Q_2, P_1, P_2) = \frac{1}{2} \left(Q_1^2 + Q_2^2 + P_1^2 + P_2^2 \right),$$

le cui equazioni del moto sono:

$$\dot{Q}_1 = P_1, \quad \dot{Q}_2 = P_2, \quad \dot{P}_1 = -Q_1, \quad \dot{P}_2 = -Q_2.$$

Tali equazioni altro non sono che le equazioni di due oscillatori armonici disaccoppiati, la cui soluzione è

$$\begin{aligned} Q_1(t) &= Q_1(0) \cos t + P_1(0) \sin t, & P_1(t) &= -Q_1(0) \sin t + P_1(0) \cos t, \\ Q_2(t) &= Q_2(0) \cos t + P_2(0) \sin t, & P_2(t) &= -Q_2(0) \sin t + P_2(0) \cos t. \end{aligned}$$

Usando la trasformazione canonica inversa, possiamo quindi ottenere la soluzione nelle variabili originali:

$$\begin{aligned} q_1(t) &= q_1(0) \cos t + (2p_1(0) - p_2(0)) \sin t, \\ p_1(t) &= -(q_1(0) + q_2(0)) \sin t + p_1(0) \cos t, \\ q_2(t) &= q_2(0) \cos t + (p_2(0) - p_1(0)) \sin t, \\ p_2(t) &= -(q_1(0) + 2q_2(0)) \sin t + p_2(0) \cos t. \end{aligned}$$

La verifica che tali soluzioni risolvono le equazioni originali è elementare e viene lasciata al lettore.