3 Equazioni differenziali ordinarie

§11 Problema di Cauchy: esistenza e unicità della soluzione

Nel capitolo precedente abbiamo studiato un caso particolare di sistemi di equazioni differenziali ordinarie: i sistemi lineari. Abbiamo visto che in tal caso esiste un'unica soluzione definita globalmente. Vogliamo ora vedere cosa si può dire per sistemi della forma $\dot{x} = f(x)$, dove $f(x)$ è una qualsiasi funzione continua.

In generale la situazione è molto più complicata del caso lineare. Sotto opportune ipotesi di regolarità sulla funzione f (e precisamente che essa sia di classe C^1, o anche più semplicemente che sia localmente lipschitziana) è ancora possibile dimostrare esistenza e unicità della soluzione. Tuttavia in generale tale soluzione sarà solo *locale*, i.e. sarà definita solo per un intervallo di tempo limitato.

Altra fondamentale differenza rispetto al caso lineare è che, nel caso di una funzione f qualsiasi, non esiste un metodo generale (cioè applicabile in qualsiasi situazione) per trovare la soluzione; anzi il più delle volte non si riescono a determinare le soluzioni analiticamente e ci si deve accontentare di studiarle numericamente. Questo non toglie che in alcuni casi semplici sia possibile calcolare la soluzione; un caso che considereremo esplicitamente saranno le equazioni a variabili separabili.

§11.1 Sistemi dinamici

Sia E uno spazio euclideo di dimensione n e sia $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base in E. Una funzione $f \colon E \to \mathbb{R}$ si dice *differenziabile* in $x \in E$ se esiste un operatore lineare $A \in L(E, \mathbb{R})$ tale che

$$\lim_{h \to 0} \frac{|f(x+h) - f(x) - Ah|}{|h|} = 0.$$

Se $n = 1$ la definizione si riduce a quella data nell'esercizio 1 del capitolo 2 , e A è la derivata della funzione f in x, i.e. $A = f'(x)$. Si definiscono *derivate parziali* di f le quantità

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) := Ae_i = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x + \varepsilon e_i) - f(x)}{\varepsilon},$$

dove $x = (x_1, \dots, x_n)$ costituisce il sistema di coordinate per E nella base $\{e_1, \dots, e_n\}$. Applicando iterativamente la definizione si possono considerare anche derivate parziali di ordine n, con $n \in \mathbb{N}$. La funzione f si dice *di classe* C^k se le derivate parziali fino all'ordine k esistono e sono continue (cfr. anche l'esercizio 2); si dice che f è *regolare* se esistono le sue derivate parziali fino a un qualche ordine (cfr. anche l'esercizio 23 del capitolo 1).

Ricordiamo che un insieme W di uno spazio euclideo E si dice aperto se per ogni $x \in W$ esiste $\varepsilon > 0$ tale che l'intorno $B_\varepsilon(x)$ è contenuto in E (cfr. l'esercizio 8 del capitolo 1).

Definizione 11.1 (Sistema dinamico) *Dati uno spazio vettoriale E e un insieme aperto $W \subset E$, un* sistema dinamico *è una coppia (W, φ), dove $\varphi \colon J \times W \to W$, con J intervallo in $\mathbb{R}$ tale che $0 \in J$, è un'applicazione differenziabile che verifica le seguenti proprietà:*

1. $\varphi(0, x) = x \ \forall x \in W$,
2. $\varphi(t + s, x) = \varphi(t, \varphi(s, x)) \ \forall x \in W$ *e* $\forall s, t \in J$ *tali che* $t + s \in J$.

Osservazione 11.2 Se $J = \mathbb{R}$, la proprietà 2 comporta che l'applicazione φ costituisce un gruppo (cfr. l'esercizio 3). In particolare esiste l'inversa: basta prendere $s = -t$ nella proprietà 2. Per consuetudine la proprietà 2 è chiamata *proprietà di gruppo* anche nel caso in cui l'applicazione φ non sia definita per ogni $t \in \mathbb{R}$ (così che non necessariamente $t + s \in J$ se $t, s \in J$) e di conseguenza φ non formi un gruppo ben definito.

Osservazione 11.3 Più in generale si può considerare il caso in cui l'intervallo $J \subset \mathbb{R}$ sia tale che, in luogo delle proprietà 1 e 2, φ verifichi le seguenti: esiste $t_0 \in J$ tale che $\varphi(t_0, x) = x$ $\forall x \in W$ e $\varphi(t+s, x) = \varphi(t+t_0, \varphi(s, x))$ $\forall x \in W$ e $\forall s, t+t_0 \in J$ tali che $t+s \in J$. Nel seguito, volendo, ogni volta che compaia t_0, il lettore può assumere per semplicità che sia $t_0 = 0$.

Osservazione 11.4 La nozione di sistema dinamico si può estendere ulteriormente al caso in cui l'insieme J in cui è definita la variabile t dipenda da x. Più precisamente, supponiamo che per ogni $x \in W$ esista un intervallo aperto non vuoto $J(x)$ e che la funzione φ sia definita nell'insieme $U := \{(t, x) \in \mathbb{R} \times W : t \in J(x)\}$. Allora, se $\varphi \colon U \to W$ è differenziabile in U e verifica la proprietà 1, con $0 \in J(x)$ $\forall x \in W$, e la proprietà 2 per ogni $s, t, s + t \in J(x)$, la coppia (W, φ) definisce un sistema dinamico (con le ovvie modifiche se 0 è sostituito con t_0 consistentemente con l'osservazione 11.3).

Data un'applicazione $(t, x) \mapsto \varphi(t, x) \in W \subset E$, per l'ipotesi di differenziabilità, è possibile definire un *campo vettoriale* in W, i.e. una funzione $f \colon W \to E$ che a ogni $x \in W$ associa un vettore $f(x) \in E$, ponendo

$$f(x) := \left. \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \varphi(t, x) \right|_{t=0}, \tag{11.1}$$

per ogni $x \in W$. Se poniamo $x(t) := \varphi(t, x)$, esplicitando la sola dipendenza dalla variabile t di φ, così che $x(0) = x$, possiamo riscrivere la (11.1) nella forma

$$\dot{x}(0) := \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = f(x(0)). \tag{11.2}$$

D'altra parte, se $y = \varphi(\tau, x)$ per qualche τ, si ha

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi(t,y)\bigg|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi(t,\varphi(\tau,x))\bigg|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi(t+\tau,x)\bigg|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}\varphi(t',x)\bigg|_{t'=\tau},$$

dove abbiamo definito $t' = t + \tau$ e utilizzato la proprietà di gruppo di φ. Poiché la (11.1) vale per ogni x, e quindi in particolare per $x = y$, troviamo

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi(t,x)\bigg|_{t=\tau} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}\varphi(t',x)\bigg|_{t'=\tau} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi(t,y)\bigg|_{t=0} = f(y) = f(\varphi(\tau,x)),$$

che, in termini della funzione $x(t)$, possiamo riscrivere $\dot{x}(\tau) = f(x(\tau))$. Data l'arbitrarietà di τ abbiamo quindi ottenuto l'equazione differenziale (cfr. la definizione 11.6 più avanti)

$$\dot{x} := \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x), \tag{11.3}$$

dove ora $x = x(t)$ è vista come funzione $x : J \to E$. Introdotto in E il sistema di coordinate $x = (x_1, \ldots, x_n)$, la (11.3) equivale al sistema di n equazioni

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, \ldots, x_n), \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, \ldots, x_n), \\ \qquad \cdots\cdots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, \ldots, x_n). \end{cases}$$

Osservazione 11.5 Il parametro $t \in J$ è interpretato come tempo: $\varphi(t, x)$ rappresenta allora l'evoluzione nel tempo del dato iniziale x e prende il nome di *moto*, mentre le equazioni della forma (11.3) sono indicate come le *equazioni del moto*. Geometricamente, fissato $x \in W$, l'applicazione $t \mapsto \varphi(t, x)$ definisce una *curva*, i.e. un'applicazione continua $\varphi : J \to W$, dove J è un intervallo in $\mathbb{R}$, e la funzione φ costituisce una *parametrizzazione* della curva. La condizione $\varphi(t_0, x) = x$ indica che le curva passa per x all'istante $t = t_0$. A ogni istante t il vettore tangente alla curva nel punto $\varphi(t, x)$ è dato dal vettore $f(\varphi(t, x))$ (cfr. l'esercizio 4); in particolare $f(x)$ è tangente alla curva nel punto x (cfr. la figura 3.1).

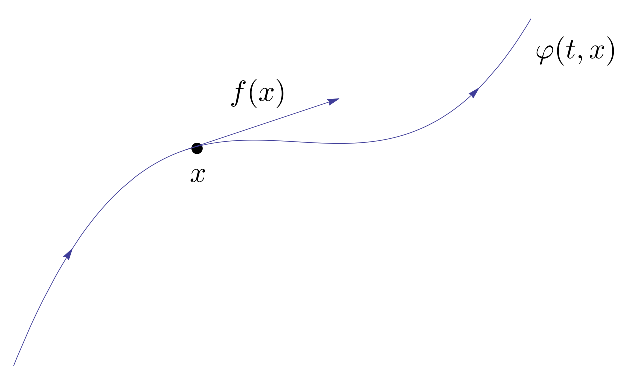

Figura 3.1: Esempio di curva $t \mapsto \varphi(t, x)$ e $f(x)$ tangente alla curva in x.

Dall'argomento precedente concludiamo che a un sistema dinamico (W, φ) possiamo sempre far corrispondere un campo vettoriale $f\colon W \to E$. Ci si può porre il problema inverso: dato un campo vettoriale $f\colon W \to E$, con $W \subset E$, esiste qualche applicazione φ che per un opportuno $J \subset \mathbb{R}$ associ a $(t, x) \in J \times W$ una funzione $\varphi(t, x)$ che risolva la (11.1) e tale che $\varphi(t_0, x) = x$ per qualche $t_0 \in J$ (eventualmente $t_0 = 0$), i.e. tale che (W, φ) si possa interpretare come sistema dinamico? Oltre al problema di esistenza si può considerare il problema di unicità delle soluzioni: una volta fissato il campo vettoriale $f\colon W \to E$ e un dato iniziale $x_0 \in W$, se esistono soluzioni $\varphi(t, x_0)$, quante ce ne sono? Sotto quali condizioni esiste un'unica soluzione? In generale la risposta a tali domande è non banale. Non è nemmeno ovvio che debbano esistere soluzioni, in particolare senza ipotesi opportune sul campo vettoriale f. Prima di affrontare il problema, definiamo in maniera più formale cosa si intende per soluzione.

Definizione 11.6 (Equazione differenziale ordinaria) *Dati uno spazio vettoriale E e un insieme aperto $W \subset E$, chiamiamo* equazione differenziale ordinaria *(o* sistema di equazioni differenziali ordinarie*) delle relazioni che legano una funzione $x\colon J \to W$, con J intervallo in $\mathbb{R}$, ad alcune delle sue derivate:*

$$F\left(t, x(t), x^{(1)}(t), \ldots, x^{(p)}(t)\right) = 0, \qquad p \in \mathbb{N}, \tag{11.4}$$

con $F : J \times W \times E^p \to E$ continua nei suoi argomenti. Qui e nel seguito $x^{(j)} = \mathrm{d}^j x/\mathrm{d}t^j$. L'equazione (11.4) *è* in forma normale *se la derivata di ordine più alto si può isolare a primo membro, scrivendo*

$$x^{(p)}(t) = f\left(t, x(t), x^{(1)}(t), \ldots, x^{(p-1)}(t)\right), \tag{11.5}$$

per qualche funzione f. L'equazione (11.4) *è* autonoma *se F non dipende esplicitamente dal tempo, i.e. se $\partial F/\partial t = 0$, ed è* non autonoma *in caso contrario.*

Un'equazione differenziale ordinaria della forma (11.4) (o (11.5)) è detta *equazione differenziale ordinaria di ordine p*. Nel seguito considereremo prevalentemente equazioni differenziali ordinarie *del primo ordine*, i.e. con $p = 1$, dal momento che, come vedremo, ci si può sempre ricondurre a tale caso. Inoltre assumeremo sempre che le equazioni si possano scrivere in forma normale – e per semplicità studieremo direttamente il caso in cui le equazioni siano già in forma normale. Infine, limiteremo preliminarmente l'analisi al caso di equazioni autonome. In altre parole, in questo paragrafo (e in quelli immediatamente successivi) ci concentreremo su equazioni differenziali ordinarie della forma

$$\dot{x} = f(x), \tag{11.6}$$

con $x\colon J \to W \subset E$ e $\dot{x}(t) = x^{(1)}(t)$. Più avanti, nel §14, vedremo che i risultati trovati nel caso (11.6) si generalizzino facilmente al caso di equazioni non autonome della forma $\dot{x} = f(x, t)$. Vedremo poi nel §15 come estendere i risultati al caso di equazioni differenziali ordinarie di ordine qualsiasi della forma (11.5).

Definizione 11.7 (Soluzione di un'equazione differenziale ordinaria) *Dati uno spazio vettoriale E e un insieme aperto $W \subset E$, sia $f : W \to E$ un'applicazione continua. Diremo che una funzione $u : J \to W$, con J intervallo in $\mathbb{R}$, è una* soluzione *dell'equazione* (11.6) *se*

1. *$u(t)$ è di classe C^1,*
2. *$\dot{u}(t) = f(u(t))$ $\forall t \in J$.*

Dato $(t_0, x_0) \in J \times W$ diremo che $u = u(t)$ è una soluzione della (11.6) *con condizioni iniziali x_0 se, oltre a soddisfare le proprietà 1 e 2, è tale che $u(t_0) = x_0$.*

Definizione 11.8 (Traiettoria) *Dato un sistema dinamico (W, φ) e fissato $x_0 \in W$, la funzione $J \mapsto W$, con J intervallo in $\mathbb{R}$, data da $\varphi(t, x_0)$, prende il nome di* traiettoria *con dato iniziale x_0.*

Definizione 11.9 (Orbita) *Sia $t \mapsto \varphi(t, x_0)$ una traiettoria del sistema dinamico (W, φ). Si chiama* orbita *l'insieme descritto da $\varphi(t, x_0)$ al variare di $t \in J$.*

Sia (W, φ) un sistema dinamico. Per ogni $x_0 \in W$ l'intervallo massimale di definizione in t della funzione $\varphi(t, x_0)$ dipenderà da x_0 (cfr. il §13 per la definizione precisa di soluzione massimale). Possiamo allora indicare tale intervallo con $J(x_0)$. Vedremo più avanti che a ogni campo vettoriale sufficientemente regolare si può associare un sistema dinamico secondo la definizione più generale data nell'osservazione 11.4 (cfr. anche l'osservazione 11.3).

Definizione 11.10 (Flusso) *Dato un sistema dinamico (W, φ), sia*

$$\Omega = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times W : t \in J(x)\}.$$

La funzione $(t, x) \in \Omega \mapsto \varphi(t, x) \in W$ prende il nome di flusso*: il flusso di un sistema dinamico è quindi l'insieme di tutte le traiettorie. Il flusso si dice* completo *se $J(x) = \mathbb{R}$ $\forall x \in W$.*

Osservazione 11.11 L'insieme $J(x)$ è un intervallo di $\mathbb{R}$: in principio, può essere della forma $[\alpha, \beta]$, (α, β), $(\alpha, \beta]$ o $[\alpha, \beta)$, con $\alpha < \beta$. Si può avere $\alpha = -\infty$ o $\beta = \infty$ o entrambi. Il flusso φ, se è completo, i.e. $J(x) = \mathbb{R}$ $\forall x \in W$, definisce un gruppo (cfr. l'osservazione 11.2).

Osservazione 11.12 In accordo con le definizioni date, la traiettoria è una curva, i.e. un'applicazione $\varphi : J \to W$ (cfr. l'osservazione 11.5); perciò la traiettoria è anche chiamata *curva integrale*. L'orbita è il *sostegno* (o *supporto* o *traccia*) della traiettoria, i.e. l'immagine dell'applicazione. Essendo la funzione φ differenziabile, la traiettoria è una curva differenziabile. La restrizione di φ a un intervallo $[\alpha, \beta] \subset J$, definita come l'applicazione $\varphi_0 : [\alpha, \beta] \to E$ tale che $\varphi_0(t) = \varphi(t)$ $\forall t \in [\alpha, \beta]$, costituisce ancora una curva differenziabile; se φ_0 è iniettiva, i.e. se $\varphi(t) \neq \varphi(s)$ $\forall t, s \in [\alpha, \beta]$ tali che $t \neq s$, si dice che è un *arco* della curva data, e i punti $\varphi(\alpha)$ e $\varphi(\beta)$ si chiamano gli *estremi* dell'arco. Se φ è iniettiva su tutto J, la curva stessa è un arco.

Osservazione 11.13 Le definizioni di traiettoria e orbita sono tutt'altro che universali e variano a seconda dei testi. A volte si definiscono traiettorie i sostegni delle curve $t \mapsto \varphi(t, x)$ oppure orbite le curve $t \mapsto \varphi(t, x_0)$. Altre volte orbite e traiettorie sono usate indifferentemente come sinonimi per indicare le curve $t \mapsto \varphi(t, x)$; del resto lo stesso termine "curva" è, spesso, usato indistintamente per indicare sia l'applicazione $\varphi : J \to E$ sia la sua immagine in E; anche noi, occasionalmente, ci uniformeremo a tale consuetudine e useremo lo stesso simbolo, per esempio γ, per indicare ora una curva (cfr. per esempio pag. 334) ora il suo sostegno (cfr. per esempio pag. 163). Come nel caso delle curve, spesso si identifica anche un arco di una curva con il suo sostegno.

Definizione 11.14 (Problema di Cauchy) *Sia W un sottoinsieme di uno spazio vettoriale E ed $f : W \to E$ una funzione. Dato un punto $x_0 \in W$, il problema della determinazione delle soluzioni del sistema di equazioni differenziali del primo ordine con condizioni iniziali*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{11.7}$$

prende il nome di problema di Cauchy *o* problema ai valori iniziali.

Vedremo che il problema di Cauchy ammette soluzione unica se si assume che la funzione f sia di classe C^1 – o anche solo lipschitziana (cfr. l'osservazione 11.24). Si può dimostrare che la soluzione esiste sempre sotto l'ipotesi che f sia solo continua (cfr. sempre l'osservazione 11.24); in tal caso però non è garantita l'unicità della soluzione (come dimostra l'esempio 11.36).

§11.2 Risultati preliminari

Prima di enunciare i risultati sul problema di Cauchy e procedere alla loro dimostrazione, richiamiamo una serie di risultati di analisi che saranno utilizzati nel corso della discussione.

Definizione 11.15 (Funzione lipschitziana) *Sia E uno spazio vettoriale normato E. Una funzione $f : W \to E$, con W insieme aperto di E, si dice* lipschitziana *in W se esiste una costante L tale che*

$$|f(x) - f(y)| \le L|x - y| \qquad \forall x, y \in W, \tag{11.8}$$

dove $|\cdot|$ è la norma in E. La costante L prende il nome di costante di Lipschitz *della funzione f nell'insieme W. Una funzione $f : W \to E$ è detta* localmente lipschitziana *in W se per ogni $x_0 \in W$ esiste un intorno $B(x_0)$ tale che la restrizione $f|B(x_0)$ è lipschitziana in $B(x_0)$.*

Osservazione 11.16 Se $f : W \to E$ è una funzione localmente lipschitziana, comunque si fissi $x_0 \in W$, esiste un intorno $B(x_0)$ tale che $|f(x) - f(y)| \le L|x - y|$ $\forall x, y \in B(x_0)$, con costante di Lipschitz $L = L(B(x_0))$ che in generale dipende dall'intorno $B(x_0)$. Se si può scegliere la costante di Lipschitz L indipendentemente dall'intorno $B(x_0)$, allora la funzione è lipschitziana in W con costante di Lipschitz L.