## §11.3 Teorema di esistenza e unicità della soluzione

Ricordiamo (cfr. l'esercizio 6 del capitolo 2) che, dati uno spazio vettoriale normato $E$ e un intervallo chiuso $J = [a, b] \subset \mathbb{R}$, una successione di funzioni $u_k \colon J \to E$ si dice *uniformemente convergente* in $J$ se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \text{ tale che } \forall p, q > N \text{ e } \forall t \in J \quad |u_p(t) - u_q(t)| < \varepsilon.$$

Se $\{u_k\}$ è una successione di funzioni continue $u_k \colon J \to E$ che converge uniformemente in $J$, allora la funzione

$$u := \lim_{k\to\infty} u_k$$

è continua in $J$ (cfr. l'esercizio 6). Inoltre, se $\{u_k\}$ è una successione di funzioni $u_k \colon J \to E$ che converge uniformemente in $J = [\alpha, \beta]$, allora (cfr. l'esercizio 7)

$$\lim_{k\to\infty} \int_\alpha^\beta \mathrm{d}t\, u_k(t) = \int_\alpha^\beta \mathrm{d}t \lim_{k\to\infty} u_k(t). \tag{11.14}$$

**Lemma 11.19** *Una funzione continua $u \colon J \to W$ è soluzione dell'equazione integrale*

$$u(t) = x_0 + \int_{t_0}^t \mathrm{d}s f(u(s)), \tag{11.15}$$

*con $f$ continua, se e solo se $u$ è di classe $C^1$ e risolve il problema di Cauchy* (11.7).

*Dimostrazione.* Supponiamo che $u$ sia continua e risolva la (11.15). Allora $u(t_0) = x_0$. Inoltre la funzione $u(t)$ è derivabile e la sua derivata soddisfa $\dot{u}(t) = f(u(t))$; ne segue in particolare che $u(t)$ ha derivata continua, i.e. è di classe $C^1$.

Viceversa, supponiamo che $u$ sia di classe $C^1$ e risolva la (11.7). Integrando $\dot{u} = f(u)$ tra $t_0$ e $t$ otteniamo la (11.15). Ovviamente essendo di classe $C^1$ la $u$ è continua. ■

**Teorema 11.20** (Esistenza della soluzione) *Sia $W$ un sottoinsieme aperto di uno spazio vettoriale normato $E$, sia $f \colon W \to E$ una funzione di classe $C^1$, e sia $x_0 \in W$. Allora esistono $a > 0$ e una soluzione $u \colon J \to W$, con $J = [t_0 - a, t_0 + a]$, del problema di Cauchy* (11.7).

*Dimostrazione.* Sia $W_0 = \overline{B_b(x_0)} = \{x \in W : |x - x_0| \le b\}$, per qualche $b > 0$; definiamo

$$M := \max_{x\in W_0} |f(x)|\,, \tag{11.16a}$$

$$L := \max_{x\in W_0} \|Df(x)\|\,. \tag{11.16b}$$

Sia $J = [t_0 - a, t_0 + a]$ con $a > 0$ da determinare. Costruiamo una successione di funzioni $u_k \colon J \to W_0$ nel modo seguente.

- Poniamo
$$u_0(t) := x_0. \tag{11.17}$$

- Definiamo
$$u_1(t) := x_0 + \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}s\, f(u_0(s)).$$

- Supponiamo che $u_k(t)$ sia stato definito e che
$$u_k(t) \in W_0 \qquad \forall t \in J; \tag{11.18}$$
definiamo allora
$$u_{k+1}(t) := x_0 + \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}s\, f(u_k(s)). \tag{11.19}$$

Tale definizione ha senso e può essere iterata, purché
$$a \leq \frac{b}{M}. \tag{11.20}$$

Infatti, utilizzando le (11.16a) e (11.18), si ha in tal caso
$$|u_{k+1}(t) - x_0| \leq \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}s\, |f(u_k(s))| \leq M|t-t_0| \leq Ma \leq b.$$

Quindi, se $u_k \in W_0$, si ha $u_{k+1} \in W_0$, e, per induzione, si trova $u_k(t) \in W_0$ $\forall k \in \mathbb{N}$ e $\forall t \in J$.

Sempre per induzione possiamo dimostrare che, se definiamo
$$B := \max_{t\in J} |u_1(t) - x_0|, \tag{11.21}$$
si ha
$$|u_k(t) - u_{k-1}(t)| \leq B(La)^{k-1}, \tag{11.22}$$
dove $L$ è la costante di Lipschitz della $f$ nell'insieme $W_0$, i.e. (cfr. la (11.16b) e la dimostrazione del lemma 11.18)
$$|f(x) - f(y)| \leq L\,|x-y| \qquad \forall x, y \in W_0. \tag{11.23}$$

Per $k = 1$ la (11.22) è ovvia in virtù della definizione (11.21); se vale la (11.22) per qualche $k$ allora
$$\begin{aligned} |u_{k+1}(t) - u_k(t)| \;&\leq\; \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}s\, |f(u_k(s)) - f(u_{k-1}(s))| \\ &\leq\; L \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}s\, |u_k(s) - u_{k-1}(s)| \leq LaB\,(La)^{k-1} \leq B(La)^k, \end{aligned}$$
da cui segue la (11.22) per $k+1$.

Abbiamo allora che per ogni $p > q > N > 0$

$$\begin{aligned} |u_p(t) - u_q(t)| &= |(u_p(t) - u_{p-1}(t)) + (u_{p-1}(t) - u_{p-2}(t)) + \ldots + (u_{q+1}(t) - u_q(t))| \\ &\le |u_p(t) - u_{p-1}(t)| + |u_{p-1}(t) - u_{p-2}(t)| + \ldots + |u_{q+1}(t) - u_q(t)| \\ &\le \sum_{k=q}^{p-1} |u_{k+1}(t) - u_k(t)| \le \sum_{k=N}^{\infty} |u_{k+1}(t) - u_k(t)| \le B \sum_{k=N}^{\infty} (La)^k, \end{aligned} \tag{11.24}$$

così che, se

$$a < \frac{1}{L}, \tag{11.25}$$

la serie in (11.24) è sommabile e dà

$$\sum_{k=N}^{\infty} (La)^k = (La)^N \sum_{k=0}^{\infty} (La)^k = F_N(La) := \frac{(La)^N}{1 - La}.$$

Dato $\varepsilon > 0$ si può scegliere $N$ sufficientemente grande così che $F_N(La) < \varepsilon$, purché valga la (11.25). Ne segue che la successione di funzioni $\{u_k\}$ è uniformemente convergente. La successione di funzioni $\{f(u_k)\}$ è anch'essa uniformemente convergente, come è immediato verificare utilizzando la continuità di $f$. La funzione

$$u(t) := \lim_{k \to \infty} u_k(t)$$

è quindi continua e si ha

$$\begin{aligned} u(t) &= \lim_{k \to \infty} u_{k+1}(t) = x_0 + \lim_{k \to \infty} \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}s\, f(u_k(s)) \\ &= x_0 + \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}s \lim_{k \to \infty} f(u_k(s)) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}s\, f(u(s)), \end{aligned}$$

dove si sono usate la convergenza uniforme della successione $\{u_k\}$ per portare il limite sotto il segno d'integrale (cfr. la (11.14)) e la continuità di $f$ per porre

$$\lim_{k \to \infty} f(u_k(s)) = f\big(\lim_{k \to \infty} u_k(s)\big) = f(u(s)).$$

In conclusione, la funzione $u \colon J \to W_0$ è continua e risolve l'equazione integrale (11.15): per il lemma 11.19 è soluzione del problema di Cauchy (11.7). ■

**Osservazione 11.21** Come la dimostrazione del teorema 11.20 fa vedere, la costante $a$ che definisce la semiampiezza dell'intervallo $J$ deve verificare le due condizioni (11.20) e (11.25):

$$a \le \frac{b}{M}, \qquad a < \frac{1}{L}, \tag{11.26}$$

dove $b$ è minore della distanza del dato iniziale $x_0$ dalla frontiera di $W$, così che il compatto $W_0 = \overline{B_b(x_0)}$ sia contenuto in $W$, $M$ è il massimo della $f$ in $W_0$, definito dalla (11.16), e $L$ è la costante di Lipschitz di $f$ in $W_0$, definita in (11.23). Un'analisi più attenta mostra che la condizione $a < 1/L$ non è necessaria (cfr. l'osservazione 11.32 più avanti) e che quindi si può dimostrare l'unicità della soluzione in un intervallo $[t_0 - a, t_0 + a]$ sotto la sola condizione $a \le b/M$. Si noti che una condizione di questo tipo non è sorprendente: più vicino è il dato iniziale alla frontiera di $W$ e maggiore è l'intensità del campo vettoriale, minore è il tempo per cui ci si aspetta che la soluzione sia definita.

**Osservazione 11.22** Le funzioni $u_k$ introdotte per dimostrare l'esistenza della soluzione sono dette *approssimanti di Picard* e il procedimento seguito è noto come *metodo di iterazione di Picard*.

**Osservazione 11.23** Nel caso di sistemi lineari

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax, \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{11.27}$$

il metodo di iterazione di Picard fornisce una costruzione diretta della soluzione $u(t)$. Infatti è facile dimostrare per induzione (cfr. l'esercizio 11) che, definendo la successione di funzioni $\{u_k\}$ iterativamente come in (11.19), si ha

$$u_k(t) = \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{n!} A^n \, (t - t_0)^n \, x_0, \tag{11.28}$$

così che

$$u(t) := \lim_{k \to \infty} u_k(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n \, (t - t_0)^n \, x_0 = \mathrm{e}^{A(t-t_0)} x_0.$$

Inoltre in tal caso nessuna condizione è richiesta su $a$. Infatti, come notato nell'osservazione 11.21, la condizione $a < 1/L$ non è mai necessaria. Inoltre, si vede facilmente che $L = \|A\|$ è una costante di Lipschitz per la funzione $f(x) = Ax$ su tutto $E$; quindi, poiché la condizione $a \le b/M$ serve per garantire che la soluzione rimanga in un compatto in cui la costante di Lipschitz si stimi uniformemente con $L$, anch'essa diventa superflua e si può prendere $W_0 = E$. Ne segue che entrambe le condizioni $a < 1/L$ e $a \le b/M$ diventano non necessarie. In conclusione la soluzione è definita per ogni $t \in \mathbb{R}$.

**Osservazione 11.24** La dimostrazione del teorema 11.20 mostra che è sufficiente assumere che il campo vettoriale sia localmente lipschitziano per dimostrare che la soluzione esiste. Si può in realtà dimostrare che, sotto la sola ipotesi di continuità sulla $f$, esiste una soluzione al problema di Cauchy (11.7) (cfr. l'esercizio 15); tuttavia l'ipotesi di locale lipschitzianità garantisce anche l'unicità della soluzione (cfr. il teorema 11.27 più avanti), che invece non vale nel caso in cui la $f$ sia solo continua (cfr. l'esempio 11.36 più avanti).

**Osservazione 11.25** La funzione $u$, soluzione del problema di Cauchy (11.7) con $f$ di classe $C^1$, dipende di fatto in modo $C^2$ da $t \in J$. Infatti la dimostrazione del teorema 11.20 fa vedere che $u$ è di classe $C^1$; d'altra parte, se $f$ è di classe $C^1$ allora, scrivendo $\dot{u}(t) = f(u(t))$, abbiamo che $\dot{u}$ è di classe $C^1$, in quanto composizione di due funzioni di classe $C^1$; essendo una primitiva di una funzione di classe $C^1$, $u$ deve essere di classe $C^2$.

Più in generale si dimostra il risultato seguente.

**Proposizione 11.26** *Se $f$ è di classe $C^k$ in* (11.7)*, la soluzione $u$ è di classe $C^{k+1}$ in $t \in J$.*

*Dimostrazione.* Per $k = 1$ la dimostrazione del teorema 11.20 dà $u$ di classe $C^1$ e quindi, per l'osservazione 11.25, la proposizione per $k = 1$ è soddisfatta. Supponiamo che la proposizione valga per qualche $k$: dimostriamo allora che essa deve valere anche per $k + 1$. Se $f \in C^{k+1}$ allora, in particolare, $f \in C^k$, quindi la soluzione $u$ è di classe $C^{k+1}$ in $t \in J$. Segue che la funzione composta $f(u(t))$ è di classe $C^{k+1}$ poiché sia $f$ sia $u$ sono tali: $\dot{u}$ è di classe $C^{k+1}$, ovvero $u$ è di classe $C^{k+2}$. ■

**Teorema 11.27** (UNICITÀ DELLA SOLUZIONE) *Sia $W$ un sottoinsieme aperto di uno spazio vettoriale normato $E$, sia $f : W \to E$ una funzione di classe $C^1$, e sia $x_0 \in W$. Allora la soluzione $u \colon J \to W$ del problema di Cauchy* (11.7)*, con $J = [t_0 - a, t_0 + a]$ e $a > 0$, è unica.*

*Dimostrazione.* Supponiamo per assurdo che esistano due soluzioni distinte $x : J \to W$ e $y \colon J \to W$ del problema di Cauchy (11.7). Definiamo

$$w(t) := |x(t) - y(t)|, \qquad w_0 := \max_{t \in J} w(t).$$

Sia $t_1 \in J$ un punto in cui la funzione $w$ raggiunge il valore massimo $w_0$. Si ha allora

$$\begin{aligned} w_0 \;&=\; |x(t_1) - y(t_1)| = \left| \left( x_0 + \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t\, \dot{x}(t) \right) - \left( x_0 + \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t\, \dot{y}(t) \right) \right| \\ &\le \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t\, |\dot{x}(t) - \dot{y}(t)| = \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t\, |f(x(t)) - f(y(t))| \\ &\le L \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t\, |x(t) - y(t)| = L \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t w(t) \le L a w_0. \end{aligned}$$

Assumendo la (11.26), si trova $w_0 \le L a w_0 < w_0$ e quindi si arriva a una contraddizione. ■

**Osservazione 11.28** Vedremo nel §12 una diversa dimostrazione del teorema 11.27, in cui non si fa uso della proprietà (11.25), che, come notato prima (cfr. l'osservazione 11.21), non è necessario richiedere per assicurare l'esistenza della soluzione.

**Teorema 11.29** (Teorema di esistenza e unicità) *Sia $W$ un sottoinsieme aperto di uno spazio vettoriale normato $E$, sia $f : W \to E$ una funzione di classe $C^1$, e sia $x_0 \in W$. Allora esistono $a > 0$ e un'unica soluzione $u : J \to W$, con $J = [t_0 - a, t_0 + a]$, del problema di Cauchy* (11.7).

*Dimostrazione.* Si combinino semplicemente il teorema 11.20 e il teorema 11.27. ∎

Il teorema 11.29 mostra che c'è corrispondenza biunivoca tra equazioni differenziali ordinarie e sistemi dinamici, purché il campo vettoriale associato sia sufficientemente regolare. Questo risponde alla domanda posta all'inizio di pag. 116 e ci autorizza a identificare un sistema dinamico con la corrispondenete equazione differenziale.

**Definizione 11.30** (Soluzione generale di un'equazione differenziale ordinaria) *Si chiama* soluzione generale *dell'equazione* (11.6) *l'insieme di tutte le soluzioni che si ottengono al variare dei dati iniziali.*

**Osservazione 11.31** La definizione 11.30 estende la definizione 10.2 al caso di equazioni differenziali non lineari. Poiché la soluzione è determinata univocamente una volta fissato il dato iniziale $c \in W \subset E$, la soluzione generale dipende, oltre che da $t$, da $n$ costanti arbitrarie, dove $n = \dim(E)$.

**Osservazione 11.32** In realtà la condizione (11.25) sotto la quale è stata dimostrata l'esistenza e l'unicità della soluzione non è necessaria. Infatti, invece della diseguaglianza (11.22), si può dimostrare per induzione (cfr. l'esercizio 16)

$$|u_k(t) - u_{k-1}(t)| \le B_0 \frac{1}{k!} L^{k-1} |t - t_0|^k, \tag{11.29}$$

con $B_0 = |f(x_0)|$, che implica la convergenza uniforme della successione $u_k$ a una funzione $u$ senza alcuna ulteriore condizione su $a$: basta tener conto che $|t - t_0| \le a$ per ogni $t \in J$. Si noti inoltre che la (11.29) implica la stima

$$|u_p(t) - u_q(t)| \le \frac{B_0}{L} \sum_{k=q+1}^{p} \frac{1}{k!} \left(L|t - t_0|\right)^k \le \frac{B_0}{L} \sum_{k=N}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(L|t - t_0|\right)^k, \tag{11.30}$$

in luogo della (11.24); di nuovo la (11.30) assicura la convegenza uniforme di $\{u_k\}$, senza imporre alcuna condizione su $a$. Poiché anche dalla dimostrazione del teorema 11.27 data al paragrafo successivo (cfr. il teorema 12.3) si vedrà che la condizione $a < 1/L$ non è necessaria, possiamo concludere che il teorema di esistenza e unicità vale sotto la sola condizione $a \le b/M$.

**Corollario 11.33** *Due soluzioni distinte dell'equazione differenziale ordinaria $\dot{x} = f(x)$ non possono mai intersecarsi.*

*Dimostrazione.* Segue dal teorema 11.29. Supponiamo per assurdo che due soluzioni distinte $y(t)$ e $z(t)$, i.e. due soluzioni con diverso dato iniziale, si intersechino per la prima volta in un punto $x_1 \in E$. Le due soluzioni devono essere soluzioni di due problemi di Cauchy che differiscono per le condizioni iniziali. Siano $y(t_0) = y_0$ e $z(t_0) = z_0$ le due condizioni iniziali, con $y_0 \neq z_0$ (cfr. la figura 3.2). Si deve allora avere $x_1 = y(t_1)$ e $x_1 = z(t_2)$ per due valori $t_1 \neq t_0$ e $t_2 \neq t_0$. Ovviamente se $z(t)$ risolve l'equazione con dato iniziale $z(t_0) = z_0$, anche $w(t) = z(t + t_2 - t_1)$ è soluzione con dato iniziale $w(t_0) = z(t_0 + t_1 - t_2)$. Inoltre $w(t_1) = z(t_2) = y(t_1) = x_1$, i.e. le due soluzioni $y(t)$ e $w(t)$ arrivano in $x_1$ nello stesso istante $t_1$ e si ha per ipotesi $y(t) \neq w(t)$ per $t \in [t_0, t_1)$ oppure per $t \in [t_1, t_0)$, a seconda che $t_1$ sia maggiore o minore di $t_0$. Consideriamo il problema di Cauchy (11.7) con condizioni iniziali $x(t_1) = x_1$. Per il teorema 11.29 la soluzione esiste ed è unica in un intervallo $[t_1 - a, t_1 + a]$. Questo implica che si debba avere $y(t) = w(t)$ almeno per $t \in [t_1 - a, t_1 + a]$, ovvero le due curve $t \mapsto y(t)$ e $t \mapsto z(t)$ non possono intersecarsi in $x_1$, senza coincidere in un intorno del punto $x_1$. Ma questo è in contraddizione con il fatto che le due soluzioni siano distinte prima di intersecarsi in $x_1$. ■

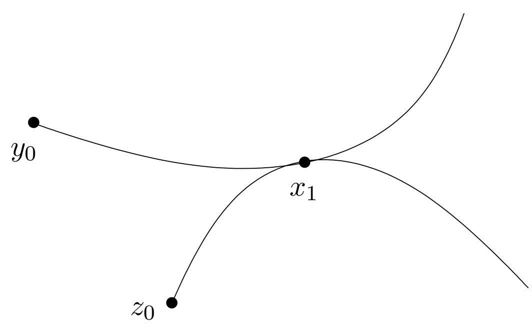


Figura 3.2: Si assume per assurdo che le soluzioni con dati iniziali $y_0$ e $z_0$ si intersechino in $x_1$.

**Osservazione 11.34** Segue in particolare dal corollario 11.33 che una soluzione non si può autointersecare. Vedremo più avanti una dimostrazione alternativa del corollario 11.33 (cfr. il lemma 13.4).

**Osservazione 11.35** Una curva $t \in J \mapsto \varphi(t)$ si dice *regolare* se è differenziabile e tale che $\dot{\varphi}(t) \neq 0$ $\forall t \in J$. Ogni traiettoria che non sia identicamente costante (i.e. ogni traiettoria tale che l'orbita corrispondente non sia un punto) è quindi una curva regolare.

**Esempio 11.36** Come anticipato nell'osservazione 11.24 l'ipotesi di locale lipschitzianità è essenziale per garantire l'unicità della soluzione. Si consideri per esempio il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x^{2/3}, \\ x(0) = 0, \end{cases} \tag{11.31}$$

dove la funzione $f(x) = 3x^{2/3}$ non è lipschitziana in $x = 0$. Si vede immediatamente che $x(t) = 0$ è soluzione. D'altra parte anche $x(t) = t^3$ è soluzione. Non solo: per ogni $t_1 < 0 < t_2$, la funzione (cfr. la figura 3.3)

$$x(t) = \begin{cases} (t-t_1)^3, & t < t_1, \\ 0, & t_1 \le t \le t_2, \\ (t-t_2)^3, & t > t_2, \end{cases} \tag{11.32}$$

è soluzione di (11.31). Infatti $x(0) = 0$, $t \mapsto x(t)$ è di classe $C^1$ e risolve l'equazione $\dot{x} = 3x^{2/3}$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.

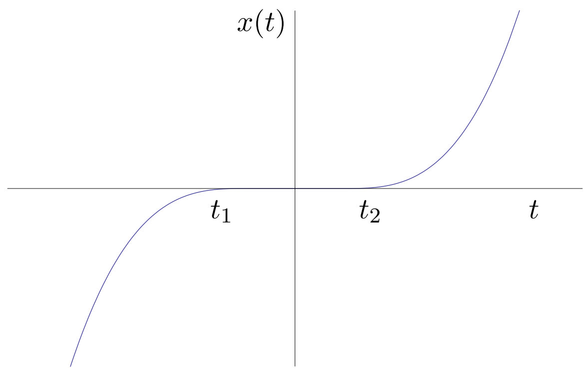


Figura 3.3: Grafico della funzione $x(t)$ data dalla (11.32).

## §12 Dipendenza dai dati iniziali

Nel presente paragrafo dimostreremo innanzitutto un importante risultato, al quale si farà riferimento più volte nel seguito, che prende il nome di lemma di Gronwall. Utilizzeremo successivamente tale risultato per dimostrare il teorema di dipendenza continua dai dati iniziali e per dare una dimostrazione alternativa del teorema di unicità.

**Lemma 12.1** (Lemma di Gronwall) *Sia $J = [\alpha, \beta]$ un intervallo dell'asse reale e sia $u \colon J \to \mathbb{R}$ una funzione continua non negativa. Se esistono due costanti $C \ge 0$ e $\kappa \ge 0$ tali che*

$$u(t) \le C + \kappa \int_\alpha^t \mathrm{d}s\, u(s), \tag{12.1}$$

*per ogni $t \in J$, allora*

$$u(t) \le C \mathrm{e}^{\kappa(t-\alpha)} \tag{12.2}$$

*per ogni $t \in J$.*

*Dimostrazione.* Se $\kappa = 0$ il risultato è banalmente soddisfatto. Consideriamo $\kappa > 0$; definiamo

$$w(t) := \int_{\alpha}^{t} \mathrm{d}s\, u(s) \tag{12.3}$$

così che la (12.1) si può riscrivere

$$u(t) \leq C + \kappa w(t), \tag{12.4}$$

che espressa in termini della sola $w(t)$ dà

$$\dot{w}(t) \leq C + \kappa w(t). \tag{12.5}$$

Se moltiplichiamo entrambi i membri della diseguaglianza (12.5) per $\mathrm{e}^{-\kappa t}$ e portiamo $\kappa w(t)\,\mathrm{e}^{-\kappa t}$ a primo membro, otteniamo

$$(\dot{w}(t) - \kappa w(t))\,\mathrm{e}^{-\kappa t} \leq C\mathrm{e}^{-\kappa t},$$

che dà

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{e}^{-\kappa t} w(t)\right) \leq C\mathrm{e}^{-\kappa t}.$$

Integrando tra $\alpha$ e $t$ abbiamo

$$\mathrm{e}^{-\kappa t} w(t) - \mathrm{e}^{-\kappa \alpha} w(\alpha) \leq \frac{C}{\kappa}\left(\mathrm{e}^{-\kappa \alpha} - \mathrm{e}^{-\kappa t}\right),$$

dove $w(\alpha) = 0$ (cfr. la definizione (12.3)). Quindi

$$w(t) \leq \frac{C}{\kappa}\left(\mathrm{e}^{\kappa(t-\alpha)} - 1\right),$$

che, per la (12.4), implica per la $u(t)$ la diseguaglianza (12.2). ■

**Osservazione 12.2** Si noti che se $C = 0$ il lemma 12.1 implica $u(t) = 0$ per ogni $t \in J$. Infatti, per ogni $t \in J$, la (12.2) dà $u(t) \leq 0$ e, per ipotesi, risulta $u(t) \geq 0$.

**Teorema 12.3** (Dipendenza continua dai dati iniziali) *Sia $W \subset E$ un sottoinsieme aperto di uno spazio vettoriale normato $E$ e sia $f : W \to E$ una funzione di classe $C^1$. Siano $x : J \to W$ e $y : J \to W$ due soluzioni di* (11.6) *nell'intervallo chiuso $J = [t_1, t_2] \ni t_0$. Allora esiste una costante $L$ tale che*

$$|x(t) - y(t)| \leq |x(t_0) - y(t_0)|\,\mathrm{e}^{L|t-t_0|}, \tag{12.6}$$

*per ogni $t \in J$.*

*Dimostrazione.* Definiamo

$$w(t) := |x(t) - y(t)| .$$

Poiché $x(t)$ e $y(t)$ sono entrambe soluzioni, con dati iniziali, rispettivamente, $x(t_0)$ e $y(t_0)$, esiste un insieme compatto $W_0 \subset W$ tale che $x(t), y(t) \in W_0$ $\forall t \in J$, e si ha

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}s\, f(x(s)), \qquad y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}s\, f(y(s)),$$

per ogni $t \in J$. Quindi

$$x(t) - y(t) = x(t_0) - y(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}s\, [f(x(s)) - f(y(s))] ,$$

da cui segue che, per $t \geq t_0$,

$$w(t) \leq w(t_0) + L \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}s\, w(s), \tag{12.7}$$

dove $L$ è la costante di Lipschitz di $f$ in $W_0$ (cfr. il lemma 11.18). Poiché $w(t_0) \geq 0$ e $L \geq 0$, possiamo applicare il lemma 12.1, così ottenendo

$$w(t) \leq w(t_0)\mathrm{e}^{L(t-t_0)}, \qquad t \geq t_0. \tag{12.8}$$

Se $t < t_0$, invece della (12.7) abbiamo

$$w(t) \leq w(t_0) + L \int_{t}^{t_0} \mathrm{d}s\, w(s)$$

e possiamo riapplicare il lemma 12.1, trovando

$$w(t) \leq w(t_0)\mathrm{e}^{L(t_0-t)}, \qquad t \leq t_0. \tag{12.9}$$

Unendo le (12.8) e (12.9), segue la (12.6). ∎

**Osservazione 12.4** Il teorema 12.3 implica immediatamente la dipendenza continua dai dati iniziali. Infatti, per ogni $t \in J = [t_1, t_2]$, ponendo $\varphi(t, x_0) = x(t)$ e $\varphi(t, y_0) = y(t)$, così che $x(t_0) = x_0$ e $y(t_0) = y_0$, possiamo riscrivere la (12.6)

$$|\varphi(t, x_0) - \varphi(t, y_0)| \leq |x_0 - y_0|\, \mathrm{e}^{L|t-t_0|} \leq |x_0 - y_0|\, \mathrm{e}^{L|t_1-t_2|},$$

così che, per ogni $t \in J$,

$$\lim_{x_0 \to y_0} |\varphi(t, x_0) - \varphi(t, y_0)| = 0,$$

che implica che la soluzione $\varphi(t, x_0)$ è continua nel dato iniziale $x_0$.

**Osservazione 12.5** Come si vede dalla dimostrazione del teorema 12.3, basta assumere che $f$ sia lipschitziana perché la soluzione dipenda con continuità dal dato iniziale. La costante $L$ è la costante di Lipschitz della funzione $f$ in un intorno del dato iniziale.

**Osservazione 12.6** Una seconda conseguenza del teorema 12.3 è una dimostrazione alternativa del teorema 11.27. In altre parole il teorema 12.3 implica, come corollario, l'unicità della soluzione del problema di Cauchy (11.7). Infatti se i dati iniziali coincidono, $x(t_0) = y(t_0)$, allora si ha $x(t) = y(t)$ per ogni $t \in J$. Si noti che, come anticipato nelle osservazioni 11.28 e 11.32, la dimostrazione basata sul teorema 12.3 non fa uso della condizione $a < 1/L$.

**Osservazione 12.7** Il teorema 12.3 assume che sia noto *a priori* che esistono due soluzioni definite nello stesso intervallo di tempo. Sarebbe più naturale (e fisicamente più interessante) porre il problema nel seguente modo: data una soluzione $\varphi(t, x_0)$ definita nell'intervallo $J = [t_1, t_2]$, è possibile affermare che ogni dato iniziale $y_0$ sufficientemente vicino a $x_0$ genera una traiettoria definita in $J$ e dare una stima quantitativa della distanza $|\varphi(t, x_0) - \varphi(t, y_0)|$ per ogni $t \in J$? A tale domanda si può dare risposta affermativa, come vedremo più avanti (cfr. il teorema 13.14).

Si può in realtà dimostrare che, se il campo vettoriale è di classe $C^1$, la dipendenza dai dati iniziali della soluzione $\varphi(t, x)$ è anch'essa di classe $C^1$. Vale infatti il seguente risultato.

**Teorema 12.8** (Dipendenza differenziabile dai dati iniziali) *Sia $W \subset E$ un sottoinsieme aperto di uno spazio vettoriale normato $E$ e sia $f : W \to E$ una funzione di classe $C^1$. Sia $x_0 \in W$. Allora la soluzione $\varphi(t, x_0)$ del problema di Cauchy* (11.7) *è di classe $C^1$ in $(t, x_0) \in J \times W$.*

Daremo la dimostrazione del teorema (12.6) nel §13. Ovviamente la dipendenza differenziabile da $t$ è già stata dimostrata ed è un requisito della definizione stessa di soluzione (cfr. la definizione 11.7). Dimostriamo adesso il seguente risultato, conseguenza immediata del teorema 12.8.

**Corollario 12.9** *Sia $W$ un sottoinsieme aperto di uno spazio vettoriale normato $E$ e sia $f : W \to E$ una funzione di classe $C^k$. Sia $x_0 \in W$. Allora la soluzione $\varphi(t, x_0)$ del problema di Cauchy* (11.7) *è di classe $C^k$ in $(t, x_0) \in J \times W$.*

*Dimostrazione.* La dimostrazione si può fare per induzione. Per $k = 1$ l'enunciato si riduce al teorema 12.8 e quindi è soddisfatto. Assumiamo che il risultato valga per qualche $k$ e mostriamo che allora esso deve valere anche per $k + 1$.

Introduciamo una variabile ausiliaria $u \in E$ e definiamo $z = (x, u) \in W \times E$; scelto un sistema di coordinate in $E$, si avrà allora $z = (x, u) = (x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_n)$. Consideriamo il sistema dinamico

$$\begin{cases} \dot{z} = F(z), \\ z(t_0) = z_0, \end{cases} \tag{12.10}$$

dove la funzione $F\colon W \times E \to E$ è definita come

$$F(z) = (f(x), Df(x)u),$$

con $Df$ data dalla *matrice jacobiana* di $f$ (i.e. $Df(x)$ è la matrice di elementi $[\partial f_i/\partial x_j](x)$), così che, nel sistema di coordinate scelto, $F(z)$ avrà componenti

$$F(z) = \left( f_1(x), \dots, f_n(x), \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(x)\, u_j, \dots, \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_n}{\partial x_j}(x)\, u_j \right),$$

mentre

$$z_0 = (x_0, u_0),$$

con $u_0 \in E$ arbitrario, rappresenta il dato iniziale. Si noti che se $f \in C^{k+1}$, allora $F$ è di classe $C^k$, quindi per l'ipotesi induttiva la soluzione di (12.10) è di classe $C^k$. Ma la soluzione di (12.10), che possiamo indicare con $\Phi(t, z_0)$, si può esprimere in funzione della soluzione $\varphi(t, x_0)$ del sistema (11.7). Risulta

$$\Phi(t, z_0) = (\varphi(t, x_0), D_0\varphi(t, x_0)u_0)\,, \tag{12.11}$$

dove $[D_0\varphi(t, x_0)]_{ij} := \partial\varphi_i(t, x_0)/\partial x_{0j}$; infatti, per derivazione esplicita della (12.11), si vede che la (12.11) risolve $\dot{z} = F(z)$, tenendo conto che

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} D_0\varphi(t, x_0)u_0 &= D_0 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi(t, x_0)u_0 = D_0\dot{\varphi}(t, x_0)\, u_0 \\ &= D_0 f(\varphi(t, x_0))u_0 = Df(\varphi(t, x_0))\, D_0\varphi(t, x_0)\, u_0, \end{aligned}$$

dal momento che, essendo, per l'ipotesi induttiva, la funzione $\varphi$ di classe $k \geq 1$ in ciascuno dei suoi argomenti, l'ordine dei due operatori di derivazione $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$ e $D_0$ si può scambiare, per il teorema di Schwarz dell'inversione dell'ordine di derivazione (cfr. l'esercizio 17).

Si può anche vedere esplicitamente che le condizioni iniziali sono verificate notando che

$$D_0\varphi(t, x_0)\, u_0|_{t=t_0} = \mathbb{1} u_0 = u_0,$$

poiché

$$[D_0\varphi(t, x_0)]_{ij}\Big|_{t=t_0} = \frac{\partial}{\partial x_{0j}} \left( x_0 + \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}s\, f_i(\varphi(s, x_0)) \right)\Bigg|_{t=t_0} = \delta_{ij}$$

così che la (12.11) è effettivamente una soluzione del problema di Cauchy (12.10).

In conclusione la (12.11) è di classe $C^k$ e, di conseguenza, $D\varphi(t, x_0)$ è di classe $C^k$ in $x_0$: quindi $\varphi(t, x_0)$ è di classe $C^{k+1}$ in $x_0$. Per la proposizione 11.26 la soluzione $\varphi(t, x_0)$ è di classe $C^{k+1}$ anche in $t$. In conclusione, $\varphi(t, x_0)$ è di classe $C^{k+1}$ in entrambi i suoi argomenti. ∎

**Osservazione 12.10** Senza ricorrere al teorema 12.8 e utilizzando invece il (più debole) teorema 12.3, che assicura la sola dipendenza continua, non differenziabile, dai dati iniziali, si può dimostrare che se $f$ è di classe $C^k$ allora la soluzione $\varphi(t, x_0)$ del sistema $\dot{x} = f(x)$, con condizioni iniziali $x(t_0) = x_0$, dipende in modo $C^{k-1}$ dal dato iniziale $x_0$. Basta tener conto che per $k = 1$, l'asserto è equivalente al teorema 12.3. La dimostrazione procede esattamente come per il corollario 12.9, con la sola differenza che l'ipotesi induttiva consiste nel supporre che per qualche $k$ si ha $\varphi(t, x_0)$ di classe $C^{k-1}$ in $x_0$ se $f$ è di classe $C^k$.

## §13 Prolungamento delle soluzioni

Il teorema 11.29 dimostra l'esistenza e l'unicità di una soluzione locale, i.e. di una soluzione definita in un intervallo di tempo finito di semiampiezza $a$, dove $a$ deve soddisfare la condizione (11.26).

Si è visto (cfr. l'osservazione 11.32) che in realtà la condizione $a < 1/L$ non è necessaria. È allora naturale chiedersi se non sia eliminabile anche la condizione $a \leq b/M$ e se non sia possibile estendere arbitrariamente l'intervallo di definizione delle soluzioni, i.e. dimostrare l'esistenza di soluzioni globali. In generale questo non è possibile, come è facile convincersi attraverso qualche semplice esempio.

**Esempio 13.1** Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 + x^2, \\ x(0) = 0; \end{cases} \tag{13.1}$$

si vede immediatamente che $x(t) = \tan t$ è soluzione. La condizione (11.20) impone $a \leq b/(1+b^2)$, poiché $M = 1 + b^2$ (si ricordi la definizione (11.16)). Si può cercare di scegliere l'insieme $W_0$ in modo tale da ottimizzare la condizione (11.20) su $a$; poiché il massimo della funzione $b/(1+b^2)$ è assunto a $b = 1$ e corrisponde a $M = 2$, troviamo $a \leq 1/2$. Tale condizione non è in realtà ottimale. Infatti $\tan t$ è definita per $|t| < \pi/2$. Quindi la soluzione del problema di Cauchy (13.1) può essere definita in ogni intervallo $[-a, a]$, con $a < \pi/2$. L'esempio mostra però nel contempo, per verifica diretta, che, nel caso (13.1), non è possibile costruire una soluzione globale, i.e. definita per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Ci si può chiedere quale sia l'intervallo più grande in cui sia possibile definire una soluzione del problema di Cauchy (11.7). Più in particolare ci si può porre il problema di studiare, data una soluzione definita in qualche intervallo $I \subset \mathbb{R}$, cosa succeda quando ci si avvicina agli estremi di $I$, i.e. se sia possibile estendere la soluzione al di fuori dell'intervallo $I$.

**Definizione 13.2** (Prolungamento) *Sia $W \subset E$ un sottoinsieme aperto di uno spazio vettoriale normato $E$ e sia $f : W \to E$ una funzione di classe $C^1$. Siano $u_1$ e $u_2$ due soluzioni del problema di Cauchy* (11.7) *definite negli intervalli $I_1 = (\alpha_1, \beta_1)$ e $I_2 = (\alpha_2, \beta_2)$ rispettivamente. Si dice che $u_2$ è un* prolungamento *di $u_1$ se $I_1 \subset I_2$ e $u_1(t) = u_2(t)$ $\forall t \in I_1$.*

**Definizione 13.3** (Soluzione massimale) *Sia $W \subset E$ un sottoinsieme aperto di uno spazio vettoriale normato $E$ e sia $f : W \to E$ una funzione di classe $C^1$. Una soluzione di* (11.7) *è detta* massimale *se non ammette alcun prolungamento.*

Il risultato seguente è una riformulazione del corollario 11.33.

**Lemma 13.4** *Siano $u_1$ e $u_2$ due soluzioni di $\dot{x} = f(x)$ nell'intervallo $I = (\alpha, \beta)$. Se esiste un tempo $t_0 \in I$ tale che $u_1(t_0) = u_2(t_0)$, allora $u_1(t) = u_2(t)$ per ogni $t \in (\alpha, \beta)$.*

*Dimostrazione.* Definiamo

$$E = \{t \in (t_0, \beta) \ : \ u_1(t) \neq u_2(t)\}.$$

Supponiamo per assurdo che $E$ sia non vuoto. Esiste allora

$$\tau := \inf E \tag{13.2}$$

e deve essere $\tau \in [t_0, \beta)$. Inoltre si ha $u_1(\tau) = u_2(\tau)$; se $\tau = t_0$ questo è ovvio per ipotesi, altrimenti segue dalla continuità delle soluzioni $u_1$ e $u_2$. Se consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), \\ x(\tau) = u_1(\tau), \end{cases}$$

per il teorema 11.29 esiste $a > 0$ tale che la soluzione è unica nell'intervallo $[\tau - a, \tau + a]$. Questo contraddice la definizione di $\tau$ in (13.2). Quindi si ha $u_1(t) = u_2(t)$ per ogni $t \in [t_0, \beta)$.

Analogamente, definendo $E' = \{t \in (\alpha, t_0) : u_1(t) \neq u_2(t)\}$ e assumendo per assurdo che esso sia non vuoto, i.e. che esista $\tau' := \sup E' \in (\alpha, t_0]$, si dimostra che le due soluzioni non possono essere distinte neppure nel sottointervallo $(\alpha, t_0)$. ■

**Corollario 13.5** *Siano $u_1$ e $u_2$ due soluzioni del problema di Cauchy* (11.7) *negli intervalli $I_1$ e $I_2$ rispettivamente, con $t_0 \in I_1 \cap I_2$. Se $I_1 \subset I_2$ allora $u_2$ è un prolungamento di $u_1$.*

*Dimostrazione.* Consideriamo la restrizione di $u_2$ a $I_1$, $u_2|I_1$. Poiché $u_1(t_0) = u_2(t_0)$, per il lemma 13.4 le due soluzioni devono coincidere in $I_1$. Per la definizione 13.2 la soluzione $u_2$ deve essere allora un prolungamento di $u_1$. ■

**Teorema 13.6** (Esistenza di un prolungamento massimale) *Sia $W \subset E$ un sottoinsieme aperto di uno spazio vettoriale normato $E$ e sia $f : W \to E$ una funzione di classe $C^1$. Ogni soluzione $u : I \to W$ di* (11.7)*, con $I$ intervallo aperto di $\mathbb{R}$, ammette un prolungamento massimale $\bar{u}$.*

*Dimostrazione.* Sia $\mathcal{U}$ l'insieme di tutti i prolungamenti di $u$. Per $v \in \mathcal{U}$, sia $I_v = (\alpha_v, \beta_v)$ l'intervallo di definizione di $v$. Per costruzione $I \subset I_v$ e $v(t) = u(t)$ per ogni $t \in I$. Poniamo

$$\alpha := \inf_{v \in \mathcal{U}} \alpha_v, \qquad \beta := \sup_{v \in \mathcal{U}} \beta_v. \tag{13.3}$$

Definiamo una funzione $\bar{u}\colon (\alpha,\beta) \to W$ nel modo seguente. Per ogni $t \in (\alpha,\beta)$ esiste $v \in \mathcal{U}$ tale che $t \in I_v$; per tale $t$ si ponga

$$\bar{u}(t) = v(t). \tag{13.4}$$

La (13.4) identifica univocamente la funzione $\bar{u}$: infatti, se $v_1, v_2 \in \mathcal{U}$ sono due prolungamenti di $u$, si ha $v_1(t) = v_2(t)$ $\forall t \in I$ per definizione di prolungamento e quindi $v_1(t) = v_2(t)$ $\forall t \in I_{v_1} \cap I_{v_2}$ per il lemma 13.4, così che si vede che il valore $\bar{u}(t)$ non dipende dalla particolare $v \in \mathcal{U}$ scelta in (13.4).

La funzione $\bar{u}$ è un prolungamento della $u$ poiché, per costruzione, per ogni $t \in I$ esiste $v \in \mathcal{U}$ tale che $\bar{u}(t) = v(t)$, dove $v$ risolve l'equazione $\dot{x} = f(x)$, quindi

- $\bar{u}$ risolve $\dot{x} = f(x)$,
- $I \subset (\alpha,\beta)$,
- $\bar{u}(t) = u(t)$ per ogni $t \in I$.

Inoltre è massimale perché per ogni $v \in \mathcal{U}$ si ha $I_v \subset (\alpha,\beta)$, data la definizione di $\alpha$ e di $\beta$ in (13.3). ■

**Lemma 13.7** *Dato uno spazio vettoriale $E$, sia $u: (\alpha,\beta) \to E$ una funzione continua nell'intervallo $(\alpha,\beta)$, contenente il punto $t_0$, e derivabile in $(\alpha,\beta) \setminus \{t_0\}$. Se esiste finito il limite*

$$\lambda := \lim_{t\to t_0} \dot{u}(t),$$

*allora $u$ è derivabile in $t_0$ e si ha $\dot{u}(t_0) = \lambda$.*

*Dimostrazione.* Introduciamo un sistema di coordinate in cui si abbia $u = (u_1, \ldots, u_n)$ e $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Per il teorema di Lagrange (cfr. l'esercizio 4 del capitolo 2)

$$\frac{u_j(t) - u_j(t_0)}{t - t_0} = \dot{u}_j(t_j),$$

per qualche $t_j \in (t_0, t)$ se $t > t_0$ e per qualche $t_j \in (t, t_0)$ se $t < t_0$; inoltre $t_j \to t_0$ per $t \to t_0$. Nel limite $t \to t_0$ otteniamo

$$\lim_{t\to t_0} \frac{u_j(t) - u_j(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t\to t_0} \dot{u}_j(t_j) = \lambda_j,$$

che dimostra che $\dot{u}(t_0)$ è ben definito e coincide con $\lambda$. ■

**Lemma 13.8** *Sia $u: (\alpha,\beta) \to W$ una funzione continua in $(\alpha,\beta)$ e sia $t_0 \in (\alpha,\beta)$. Se $u$ è soluzione di $\dot{x} = f(x)$, con $f: W \to E$, negli intervalli aperti $(\alpha,t_0)$ e $(t_0,\beta)$, allora essa è soluzione in $(\alpha,\beta)$.*

*Dimostrazione.* Poiché $u$ e $f$ sono continue nei loro argomenti, la funzione $f \circ u$ è continua in $t$, quindi

$$\lim_{t \to t_0} f(u(t)) = f(u(t_0)).$$

D'altra parte $\dot{u}(t) = f(u(t))$ per ogni $t \in (\alpha, \beta) \setminus \{t_0\}$, per ipotesi, così che

$$\lim_{t \to t_0} \dot{u}(t) = f(u(t_0)),$$

così che possiamo applicare il lemma 13.7 per concludere che $u$ è derivabile in $t_0$ e

$$\dot{u}(t_0) = f(u(t_0)).$$

In conclusione $u \colon (\alpha, \beta) \to E$ è di classe $C^1$ e soddisfa $\dot{u}(t) = f(u(t))$ $\forall t \in (\alpha, \beta)$. Perciò è una soluzione di $\dot{x} = f(x)$ in $(\alpha, \beta)$ (cfr. la definizione 11.7). ■

**Lemma 13.9** *Sia $u$ una soluzione di $\dot{x} = f(x)$, con $f : W \to E$ di classe $C^1$, nell'intervallo $(\alpha, \beta)$. Se esiste finito il limite*

$$u_\beta := \lim_{t \to \beta^-} u(t) \in W, \tag{13.5}$$

*esiste $a > 0$ tale che la soluzione $u$ è prolungabile in $(\alpha, \beta + a)$. Analogamente se esiste finito il limite*

$$u_\alpha := \lim_{t \to \alpha^+} u(t) \in W, \tag{13.6}$$

*esiste $a' > 0$ tale che la soluzione $u$ è prolungabile in $(\alpha - a', \beta)$.*

*Dimostrazione.* Sotto le ipotesi fatte, consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), \\ x(\beta) = u_\beta. \end{cases} \tag{13.7}$$

Per il teorema 11.29 esiste $a > 0$ tale che esiste ed è unica la soluzione $v$ di (13.7) in un intervallo $[\beta - a, \beta + a]$. La funzione

$$w(t) := \begin{cases} u(t), & t \in (\alpha, \beta), \\ v(t), & t \in [\beta, \beta + a), \end{cases} \tag{13.8}$$

è continua. Infatti $u$ e $v$ sono continue nei rispettivi intervalli di definizione e in $t = \beta$ la continuità è garantita dalla (13.5) e dalla condizione iniziale $v(\beta) = u_\beta$. Poiché $(\beta, \beta + a) \subset [\beta, \beta + a)$, per il lemma 13.8, la (13.8) è soluzione di $\dot{x} = f(x)$ nell'intervallo $(\alpha, \beta + a)$. Analogamente si dimostra che, sotto la condizione (13.6), la soluzione risulta prolungabile a sinistra, i.e. in $(\alpha - a', \beta)$, con $a' > 0$. ■

**Osservazione 13.10** Il lemma 13.9 giustifica perché, nella definizione di soluzione massimale (e nel teorema 13.6 sull'esistenza di un prolungamento massimale), abbiamo considerato intervalli aperti. Supporre che una soluzione massimale sia definita in un intervallo che contenga, per esempio, il suo estremo destro $\beta$ porta a un assurdo: se $u$ è soluzione in $\beta$, allora $u(\beta)$ e $\dot{u}(\beta)$, e quindi anche $f(u(\beta)) = \dot{u}(\beta)$, sono ben definiti, così che, ragionando come nella dimostrazione del lemma 13.9, si trova che la soluzione è prolungabile a destra di $\beta$.

**Lemma 13.11** *Sia $W \subset E$ un sottoinsieme aperto di uno spazio vettoriale normato $E$ e sia $f : W \to E$ una funzione di classe $C^1$. Sia $u : (\alpha, \beta) \to W$ una soluzione di $\dot{x} = f(x)$. Se esiste una successione crescente $\{t_k\}$ convergente a $\beta$ tale che*

$$u_\beta := \lim_{k\to\infty} u(t_k) \in W, \tag{13.9}$$

*allora la soluzione $u$ risulta prolungabile a destra. Analogamente se esiste una successione decrescente $\{s_k\}$ convergente ad $\alpha$ tale che*

$$u_\alpha := \lim_{k\to\infty} u(s_k) \in W, \tag{13.10}$$

*allora la soluzione $u$ risulta prolungabile a sinistra.*

*Dimostrazione.* Dimostriamo la prolungabilità a destra; la prolungabilità a sinistra si potrà dimostrare in modo analogo. Poiché per ipotesi $u_\beta \in W$ e $W$ è aperto, esiste un intorno $B_\varepsilon(u_\beta) \subset W$, con $\varepsilon$ sufficientemente piccolo così che si abbia $W_0 := \overline{B_\varepsilon(u_\beta)} \subset W$. Definiamo

$$M := \max_{x\in W_0} |f(x)|. \tag{13.11}$$

Per la (13.9), fissato $\varepsilon$, esiste $N$ tale che per ogni $k > N$ si ha

$$|t_k - \beta| < \frac{\varepsilon}{4M}, \qquad |u(t_k) - u_\beta| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{13.12}$$

così che, per ogni $t \in (\alpha, \beta)$ e per ogni $k > N$,

$$|u(t) - u_\beta| \leq |u(t) - u(t_k)| + |u(t_k) - u_\beta| \leq |u(t) - u(t_k)| + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{13.13}$$

Vogliamo allora dimostrare che

$$|u(t) - u(t_k)| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad t_k < t < \beta, \tag{13.14}$$

in modo che dalla (13.13) segua

$$|u(t) - u_\beta| \leq \varepsilon, \qquad t_k < t < \beta,$$

che implica la (13.5) e quindi, per il lemma 13.9, la prolungabilità a destra della soluzione.

Supponiamo per assurdo che la (13.14) non valga. Questo significa che, se definiamo

$$E := \{t \in (t_k, \beta) \ : \ |u(t) - u(t_k)| \geq \varepsilon/2\} \, ,$$

si ha $E \neq \emptyset$, così che esiste $\tau := \inf E$, con $\tau \in (t_k, \beta)$. Poiché $u$ è continua (e quindi $\lim_{t \to t_k} u(t) = u(t_k)$, così che $u(t) - u(t_k)$ può essere reso arbitrariamente piccolo purché si scelga $t$ sufficientemente vicino a $t_k$), si deve avere

$$|u(\tau) - u(t_k)| = \frac{\varepsilon}{2}. \tag{13.15}$$

Inoltre, per $s \in (t_k, \tau)$, si ha

$$|u(s) - u_\beta| \leq |u(s) - u(t_k)| + |u(t_k) - u_\beta| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Infatti $|u(s) - u(t_k)| < \varepsilon/2$, poiché $s \in (t_k, \beta) \setminus E$, e $|u(t_k) - u_\beta| < \varepsilon/2$, per la (13.12), così che $u(s) \in B_\varepsilon(u_\beta)$ e si può perciò applicare la stima (13.11) a $f(u(s))$. Si ottiene allora

$$|u(\tau) - u(t_k)| \leq \int_{t_k}^{\tau} \mathrm{d}s \, |\dot{u}(s)| = \int_{t_k}^{\tau} \mathrm{d}s \, |f(u(s))| \leq M \, |\tau - t_k| \, . \tag{13.16}$$

Unendo le (13.12), (13.15) e (13.16) troviamo

$$\frac{\varepsilon}{2} = |u(\tau) - u(t_k)| \leq M \, |\tau - t_k| \leq M \, |\beta - t_k| < \frac{\varepsilon}{2},$$

che è assurdo. ■

**Teorema 13.12** (Teorema del prolungamento) *Sia $W \subset E$ un sottoinsieme aperto di uno spazio vettoriale normato $E$ e sia $f \colon W \to E$ una funzione di classe $C^1$. Sia $u \colon (\alpha, \beta) \to W$ una soluzione massimale di $\dot{x} = f(x)$. Allora per ogni insieme compatto $K \subset W$, esiste $\delta > 0$ tale che $\forall t \notin (\alpha + \delta, \beta - \delta)$ si ha $u(t) \notin K$.*

*Dimostrazione.* Supponiamo per assurdo che per ogni $\delta > 0$ esista $t \in [\beta - \delta, \beta)$ tale che $u(t) \in K$. In tal caso sarebbe allora possibile trovare una successione $t_k \to \beta^-$ tale che $u(t_k) \in K$ (basterebbe prendere per esempio $\delta = 1/k$). Poiché $K$ è compatto si potrebbe allora estrarre una sottosuccessione $\{t_{k_j}\}$ tale che $u(t_{k_j})$ converga a un punto $u_\beta \in K$. Per il lemma 13.11 la soluzione $u$ sarebbe allora prolungabile, contro l'ipotesi che fosse massimale. Analogamente si discute il caso in cui $t$ sia arbitrariamente vicino all'estremo $\alpha$. ■

**Corollario 13.13** (Corollario del teorema del prolungamento) *Sia $W \subset E$ un sottoinsieme aperto di uno spazio vettoriale normato $E$ e sia $f : W \to E$ una funzione di* *classe $C^1$. Sia $K \subset W$ un insieme compatto e sia $x_0 \in K$. Supponiamo che sia noto che ogni soluzione $u\colon [t_0, t_1] \to W$ del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

*sia contenuta interamente in $K$. Allora esiste un prolungamento massimale esteso a $[t_0, +\infty)$ contenuto in $K$. Analogamente se ogni soluzione $u\colon [t_1, t_0] \to W$ è contenuta interamente in $K$, allora esiste un prolungamento massimale esteso a $(-\infty, t_0]$ contenuto in $K$.*

*Dimostrazione.* Per il teorema 13.6 esiste una soluzione massimale $\bar{u}$. Supponiamo per assurdo che $\bar{u}$ sia definita in $(\alpha, \beta)$, con $t_0 \in (\alpha, \beta)$ e $\beta < \infty$. Per il teorema 13.12 dovrebbe esistere $t_1 < \beta$ tale che $\bar{u}(t_1) \notin K$. La soluzione $\bar{u}|[t_0, t_1]$, i.e. la restrizione di $\bar{u}$ all'intervallo $[t_0, t_1]$, non sarebbe allora contenuta interamente in $K$. Il caso $t_1 < t_0$ si discute in modo analogo. ∎

Il teorema 12.3 sulla dipendenza continua dai dati iniziali assumeva che le due soluzioni fossero definite in uno stesso intervallo $[t_0 - a, t_0 + a]$. Una formulazione più naturale sarebbe la seguente (cfr. anche l'osservazione 12.7): presi comunque due dati iniziali vicini, le soluzioni che si originano da essi saranno definite sullo stesso intervallo e rimarranno vicine in tale intervallo (tanto più vicine quanto più lo sono i dati iniziali).

**Teorema 13.14** (Dipendenza continua dai dati iniziali) *Sia $W \subset E$ un sottoinsieme aperto di uno spazio vettoriale normato $E$ e sia $f : W \to E$ una funzione di classe $C^1$. Sia $u : [t_0, t_1] \to W$ una soluzione del problema di Cauchy* (11.7). *Allora esistono un intorno $B(x_0)$ e una costante positiva $\kappa$, tali che per ogni $z_0 \in B(x_0)$ esiste un'unica soluzione $z(t)$ la quale*

1. *sia definita in $[t_0, t_1]$,*
2. *verifichi le condizioni iniziali $z(t_0) = z_0$,*
3. *sia tale che*
$$|u(t) - z(t)| \le |x_0 - z_0| \, \mathrm{e}^{\kappa |t - t_0|}, \tag{13.17}$$
*per ogni $t \in [t_0, t_1]$.*

*Dimostrazione.* Poiché $[t_0, t_1]$ è compatto esiste $\varepsilon > 0$ tale che per ogni $t \in [t_0, t_1]$ si ha

$$\overline{B_\varepsilon(u(t))} = \{x \in E \ : \ |x - u(t)| \le \varepsilon\} \subset W, \tag{13.18}$$

come si può facilmente verificare ragionando per assurdo (cfr. l'esercizio 18). Quindi l'insieme

$$K := \bigcup_{t_0 \le t \le t_1} \overline{B_\varepsilon(u(t))}$$

è un sottoinsieme compatto di $W$ e la restrizione di $f$ a $K$, $f|K$, è lipschitziana (cfr. il lemma 11.17). Sia $L$ la sua costante di Lipschitz. Si scelga $\delta > 0$, tale che

$$\delta \leq \mathrm{e}^{-L|t_1 - t_0|}\varepsilon, \tag{13.19}$$

e si consideri l'intorno $B(x_0) := B_\delta(x_0)$. Vogliamo dimostrare che comunque si scelga $z_0 \in B(x_0)$ la soluzione $z(t)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), \\ x(t_0) = z_0, \end{cases} \tag{13.20}$$

verifica le proprietà 1÷3 del teorema.

Notiamo subito che la proprietà 2 è soddisfatta per costruzione.

Poiché $z_0 \in B(x_0) \subset W$, la soluzione di (13.20) ammette un prolungamento massimale definito in $(\alpha, \beta)$, dove $\alpha < t_0 < \beta$. Dimostriamo ragionando per assurdo che $\beta > t_1$. Supponiamo infatti che sia $\beta \leq t_1$: allora si avrebbe per ogni $t \in [t_0, \beta)$, per il teorema 12.3 e per la (13.19),

$$|z(t) - u(t)| \leq |x_0 - z_0|\, \mathrm{e}^{L|t-t_0|} \leq \delta\, \mathrm{e}^{L|t-t_0|} \leq \delta\, \mathrm{e}^{L|t_1-t_0|} \leq \varepsilon,$$

ovvero $z(t) \in K$ per ogni $t \in [t_0, \beta)$. Per il teorema 13.12, la soluzione $z(t)$ non potrebbe essere massimale. Segue che $z(t)$ deve essere definita per ogni $t \in [t_0, t_1]$. Questo dimostra la proprietà 1 e implica anche, per il lemma 13.4, l'unicità della soluzione.

La proprietà 3 segue direttamente dalla stima esponenziale (12.6) del teorema 12.3. Ne segue in particolare che in (13.17) si ha $\kappa = L$, se $L$ è la costante di Lipschitz di $f$ in $K$. ∎

## §14 Sistemi non autonomi di equazioni differenziali

Finora abbiamo considerato il caso di sistemi di equazioni differenziali autonomi, in cui il campo vettoriale $f(x)$ non dipende da $t$. I risultati dei paragrafi precedenti si estendono in modo naturale al caso di sistemi in cui il campo vettoriale dipende esplicitamente dal tempo, i.e. sistemi della forma $\dot{x} = f(t, x)$. Come applicazione di tali sistemi vedremo un caso semplice di sistemi (in $\mathbb{R}$) in cui è possibile ottenere analiticamente la soluzione mediante una semplice integrazione: i cosiddetti sistemi a variabili separabili.

Se invece del problema di Cauchy (11.7) consideriamo

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{14.1}$$

con $f : I \times W \to E$, possiamo porci ugualmente il problema di esistenza e unicità della soluzione. In questo caso abbiamo dunque un sistema non autonomo. È facile verificare che vale lo stesso risultato trovato nel caso autonomo (cfr. il teorema 11.29).