è un sottoinsieme compatto di W e la restrizione di f a K, $f|K$, è lipschitziana (cfr. il lemma 11.17). Sia L la sua costante di Lipschitz. Si scelga $\delta > 0$, tale che

$$\delta \leq \mathrm{e}^{-L|t_1-t_0|}\varepsilon, \tag{13.19}$$

e si consideri l'intorno $B(x_0) := B_\delta(x_0)$. Vogliamo dimostrare che comunque si scelga $z_0 \in B(x_0)$ la soluzione $z(t)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), \\ x(t_0) = z_0, \end{cases} \tag{13.20}$$

verifica le proprietà 1÷3 del teorema.

Notiamo subito che la proprietà 2 è soddisfatta per costruzione.

Poiché $z_0 \in B(x_0) \subset W$, la soluzione di (13.20) ammette un prolungamento massimale definito in (α, β), dove $\alpha < t_0 < \beta$. Dimostriamo ragionando per assurdo che $\beta > t_1$. Supponiamo infatti che sia $\beta \leq t_1$: allora si avrebbe per ogni $t \in [t_0, \beta)$, per il teorema 12.3 e per la (13.19),

$$|z(t) - u(t)| \leq |x_0 - z_0|\, \mathrm{e}^{L|t-t_0|} \leq \delta\, \mathrm{e}^{L|t-t_0|} \leq \delta\, \mathrm{e}^{L|t_1-t_0|} \leq \varepsilon,$$

ovvero $z(t) \in K$ per ogni $t \in [t_0, \beta)$. Per il teorema 13.12, la soluzione $z(t)$ non potrebbe essere massimale. Segue che $z(t)$ deve essere definita per ogni $t \in [t_0, t_1]$. Questo dimostra la proprietà 1 e implica anche, per il lemma 13.4, l'unicità della soluzione.

La proprietà 3 segue direttamente dalla stima esponenziale (12.6) del teorema 12.3. Ne segue in particolare che in (13.17) si ha $\kappa = L$, se L è la costante di Lipschitz di f in K. ■

§14 Sistemi non autonomi di equazioni differenziali

Finora abbiamo considerato il caso di sistemi di equazioni differenziali autonomi, in cui il campo vettoriale $f(x)$ non dipende da t. I risultati dei paragrafi precedenti si estendono in modo naturale al caso di sistemi in cui il campo vettoriale dipende esplicitamente dal tempo, i.e. sistemi della forma $\dot{x} = f(t, x)$. Come applicazione di tali sistemi vedremo un caso semplice di sistemi (in $\mathbb{R}$) in cui è possibile ottenere analiticamente la soluzione mediante una semplice integrazione: i cosiddetti sistemi a variabili separabili.

Se invece del problema di Cauchy (11.7) consideriamo

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{14.1}$$

con $f : I \times W \to E$, possiamo porci ugualmente il problema di esistenza e unicità della soluzione. In questo caso abbiamo dunque un sistema non autonomo. È facile verificare che vale lo stesso risultato trovato nel caso autonomo (cfr. il teorema 11.29).

Definizione 14.1 (Lipschitzianità in x). *Sia $W \subset E$ un sottoinsieme aperto di uno spazio vettoriale normato E e sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo in $\mathbb{R}$. Una funzione $f : I \times W \to E$ si dice* localmente lipschitziana in x *se per ogni $x_0 \in W$ esistono un intorno $B_0 = B(x_0)$ e una costante $L = L(B_0)$ tali che*

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq L|x-y|$$

per ogni $x, y \in B_0$ e per ogni $t \in I$. La costante L prende il nome di costante di Lipschitz di f in B_0.

Teorema 14.2 (Esistenza e unicità per sistemi non autonomi) *Sia $W \subset E$ un sottoinsieme aperto di uno spazio vettoriale normato E, sia I un intervallo in $\mathbb{R}$, sia $f : I \times W \to E$ una funzione localmente lipschitziana in x, e sia infine $(t_0, x_0) \in I \times W$. Allora esistono $a > 0$ e un'unica soluzione $u : J \to W$, con $J = [t_0 - a, t_0 + a]$, del problema di Cauchy* (14.1).

Dimostrazione. La dimostrazione è assolutamente identica a quella data del teorema 11.29 (i.e. del teorema 11.20 e del teorema 11.27). Si ricordi in particolare che per dimostrare il teorema 11.29 è sufficiente che la funzione f sia localmente lipschitziana. L'unica accortezza è che, oltre alla condizione (11.26), dovremo imporre anche la condizione che a appartenga all'intervallo I in cui la f è definita. Sia $I_0 = [\alpha, \beta] \subset I$, per qualche $\alpha < \beta$, un qualsiasi intervallo chiuso contenuto in I (se I è chiuso si può prendere $I_0 = I$); se poniamo

$$r := \min\{t_0 - \alpha, \beta - t_0\}, \tag{14.2}$$

la condizione su a diventa

$$a < \min\left\{r, \frac{b}{M}, \frac{1}{L}\right\}, \tag{14.3}$$

dove

$$M := \max_{(t,x) \in I_0 \times W_0} |f(t,x)| \,. \tag{14.4}$$

Per il resto la dimostrazione procede inalterata come nel caso autonomo. Di nuovo la condizione $a < 1/L$ non è in realtà necessaria (cfr. l'osservazione 11.32). ■

Anche i risultati del §13 possono esser estesi al caso (14.1). Dal momento che le dimostrazioni procedono allo stesso modo, ne ometteremo la loro formulazione, che per altro si può ricavare direttamente dagli argomenti precedenti.

Finora si sono discusse proprietà generali delle soluzioni del problema di Cauchy (11.7) nel caso autonomo e del problema di Cauchy (14.1) nel caso non autonomo. In particolare il teorema 14.2, che si riduce al teorema 11.29 nel caso autonomo, garantisce l'esistenza e l'unicità della soluzione, ma non è immediatamente utilizzabile per trovare la soluzione stessa. È vero che il metodo di iterazione di Picard fornisce un procedimento che si può seguire in pratica per costruire soluzioni approssimate, ma non è detto che sia di aiuto per calcolare analiticamente la soluzione esatta.

In generale la ricerca delle soluzioni per il problema di Cauchy (14.1), anche nel caso autonomo (11.7) in cui $f(t,x) = f(x)$, è un problema difficile se non impossibile. Ci si può chiedere se esistano casi in cui si possano trovare concretamente le soluzioni. Un caso in cui questo avviene è dato dai sistemi di equazioni lineari a coefficienti costanti, $\dot{x} = Ax$, con $A \in L(E)$, visto al capitolo 2. Il caso in cui $A = A(t)$ è una funzione continua in t è ben più complicato. Se $A(t)$ è una funzione periodica si ha quella che è nota come *teoria di Floquet* (cfr. la nota bibliografica): in tal caso si riescono ancora a caratterizzare le soluzioni. Se $A(t)$ è una funzione continua qualsiasi non esiste alcuna teoria generale.

Un altro caso in cui si riesce a trovare esplicitamente la soluzione (forse anche più semplice del caso delle equazioni differenziali lineari, pur presentando sottigliezze di cui dover tener conto) è il seguente.

Definizione 14.3 (Equazione a variabili separabili) *Un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine in* $\mathbb{R}$

$$\dot{x} = f(t,x), \tag{14.5}$$

con $f : I \times W \to \mathbb{R}$*,* $I \subset \mathbb{R}$ *e* $W \subset \mathbb{R}$*, si dice* equazione a variabili separabili *se* $f(t,x) = g(t)\,h(x)$*, i.e. se essa è della forma*

$$\dot{x} = g(t)\,h(x), \tag{14.6}$$

con $g \colon I \to \mathbb{R}$ *e* $h \colon W \to E$*.*

Osservazione 14.4 Si noti che il caso $g(t) = 1$ corrisponde al caso autonomo in $E = \mathbb{R}$ (cfr. la (11.6)). La discussione seguente mostra in particolare che l'equazione (11.6), nel caso $E = \mathbb{R}$, è sempre risolubile per integrazione diretta.

L'equazione (14.6), con condizioni iniziali $x(t_0) = x_0$, si può risolvere formalmente nel modo seguente. Se $h(x) \neq 0$ si può dividere per $h(x)$, ottenendo

$$\frac{1}{h(x)} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = g(t);$$

integrando tra t_0 e t si ha

$$\int_{t_0}^{t} \mathrm{d}s \, \frac{1}{h(x(s))} \frac{\mathrm{d}x(s)}{\mathrm{d}s} = \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}s \, g(s), \tag{14.7}$$

così che, se $\mathrm{d}x(s)/\mathrm{d}s \neq 0$ per $s \in [t_0, t]$, si ottiene

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{\mathrm{d}x}{h(x)} = \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}s \, g(s). \tag{14.8}$$

Indichiamo con $G(t)$ una primitiva di $g(t)$ e con $F(x)$ una primitiva di $1/h(x)$. Si ha allora

$$F(x(t)) = G(t) + F(x_0) - G(t_0),$$

che è un'equazione implicita che lega la soluzione $x(t)$ a t. Se la funzione F è invertibile, otteniamo

$$x(t) = F^{-1}\left(G(t) + F(x_0) - G(t_0)\right), \tag{14.9}$$

che esprime la soluzione in maniera esplicita.

Si noti che non tutti i passaggi sono giustificati in generale. Infatti sia la divisione per $h(x)$ che il cambiamento di variabili nel primo integrale in (14.7) richiedono ipotesi aggiuntive e non sempre sono realizzate in pratica. Occorrerà allora vedere caso per caso se i risultati trovati mediante il procedimento formale sopra descritto sono utilizzabili. Una formulazione più precisa (ma in sostanza equivalente) sarà data dalla proposizione 14.7 più avanti.

Esempio 14.5 Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = 2tx, \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

al variare dei dati iniziali $x_0 \in \mathbb{R}$. Con le notazioni introdotte dopo la (14.8) abbiamo

$$G(t) = t^2, \qquad F(x) = \log|x|,$$

così che

$$\log|x(t)| = \log|x_0| + t^2,$$

purché sia $x_0 \neq 0$. Quindi

$$|x(t)| = |x_0|\,\mathrm{e}^{t^2}, \tag{14.10}$$

D'altra parte, poiché $x(0) = x_0$, in (14.10) possiamo eliminare il modulo, così che

$$x(t) = x_0\,\mathrm{e}^{t^2} \tag{14.11}$$

rappresenta la soluzione per ogni $x_0 \neq 0$. Se invece $x_0 = 0$ si vede immediatamente che $x(t) = 0$ è soluzione con quel dato iniziale. Poiché la (14.11) è identicamente nulla per $x_0 = 0$, possiamo concludere che la soluzione è sempre della forma (14.11). Si noti però che la discussione del dato iniziale $x_0 = 0$ va fatta a parte, dal momento che il procedimento descritto sopra non è giustificato in questo caso (cfr. il commento dopo la (14.9)).

Osservazione 14.6 Se non è assicurata l'unicità del problema di Cauchy il metodo descritto non consente di trovare tutte le soluzioni. Se consideriamo il problema di Cauchy (11.31), abbiamo, con le notazioni introdotte dopo la (14.8),

$$G(t) = t, \qquad F(x) = x^{1/3},$$

così che risulta, tenendo conto delle condizioni iniziali,

$$x(t) = t^3,$$

che è tuttavia solo una delle infinite soluzioni possibili (cfr. la discussione dell'esempio 11.36).

Proposizione 14.7 *Sia data l'equazione a variabili separabili*

$$\begin{cases} \dot{x} = h(x)\, g(t), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{14.12}$$

con $g\colon I \to \mathbb{R}$ *continua e* $h\colon W \to E$ *localmente lipschitziana. Se*

$$h(x_0) \neq 0, \tag{14.13}$$

allora esiste un'unica soluzione $x(t)$ *di* (14.12)*, definita implicitamente dall'equazione*

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{\mathrm{d}x}{h(x)} = \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}s\, g(s), \tag{14.14}$$

definita fin tanto che $h(x(t)) \neq 0$.

Dimostrazione. La dimostrazione consiste in una verifica diretta che la funzione $x(t)$ definita implicitamente dalla (14.14) è soluzione del problema di Cauchy (14.12).

In primo luogo si osservi che il primo integrale in (14.14) è ben definito se $h(x) \neq 0$ per ogni x nell'intervallo di integrazione; verificheremo *a posteriori* che questo accade se vale la (14.13), purché $|t - t_0|$ sia sufficientemente piccolo.

La funzione $x(t)$ soddisfa la condizione iniziale $x(t_0) = x_0$, dal momento che tale condizione fa annullare il primo integrale in (14.12). Inoltre, derivando entrambi i membri della (14.14) rispetto al tempo, otteniamo

$$\frac{1}{h(x(t))}\, \dot{x}(t) = g(t),$$

così che $x(t)$ effettivamente risolve l'equazione in (14.12). Per il teorema 14.2, esiste $a > 0$ tale che la funzione $x(t)$ è soluzione della (14.12), nel senso della definizione 11.7, in un intervallo $J = [t_0 - a, t_0 + a]$. In particolare $x(t)$ è continua. Poiché anche h è continua, se $h(x_0) \neq 0$ si ha $h(x(t)) \neq 0$ $\forall t \in J$, se a è sufficientemente piccolo (cfr. l'esercizio 20). Sempre per il teorema 14.2 tale soluzione è unica, viste le ipotesi di regolarità della h.

Infine la soluzione $x(t)$ può essere prolungata in qualsiasi intervallo $(\alpha, \beta) \supset J$ purché $h(x(t)) \neq 0$ per ogni $t \in (\alpha, \beta)$: infatti in tale intervallo (α, β) il prolungamento è definito dalla stessa (14.14). ∎

§15 Sistemi di equazioni differenziali di ordine qualsiasi

I risultati dei paragrafi precedenti si estendono facilmente al caso di sistemi di equazioni differenziali di ordine qualsiasi. Il corrispondente problema di Cauchy ammetterà però una soluzione unica purché si impongano condizioni iniziali non solo sulla funzione x, ma anche sulle sue prime $p - 1$ derivate (se p è l'ordine più alto delle derivate che appaiono nelle equazioni).