Proposizione 14.7 *Sia data l'equazione a variabili separabili*

$$\begin{cases} \dot{x} = h(x)\, g(t), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{14.12}$$

con $g\colon I \to \mathbb{R}$ *continua e* $h\colon W \to E$ *localmente lipschitziana. Se*

$$h(x_0) \neq 0, \tag{14.13}$$

allora esiste un'unica soluzione $x(t)$ *di* (14.12)*, definita implicitamente dall'equazione*

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{\mathrm{d}x}{h(x)} = \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}s\, g(s), \tag{14.14}$$

definita fin tanto che $h(x(t)) \neq 0$.

Dimostrazione. La dimostrazione consiste in una verifica diretta che la funzione $x(t)$ definita implicitamente dalla (14.14) è soluzione del problema di Cauchy (14.12).

In primo luogo si osservi che il primo integrale in (14.14) è ben definito se $h(x) \neq 0$ per ogni x nell'intervallo di integrazione; verificheremo *a posteriori* che questo accade se vale la (14.13), purché $|t - t_0|$ sia sufficientemente piccolo.

La funzione $x(t)$ soddisfa la condizione iniziale $x(t_0) = x_0$, dal momento che tale condizione fa annullare il primo integrale in (14.12). Inoltre, derivando entrambi i membri della (14.14) rispetto al tempo, otteniamo

$$\frac{1}{h(x(t))}\, \dot{x}(t) = g(t),$$

così che $x(t)$ effettivamente risolve l'equazione in (14.12). Per il teorema 14.2, esiste $a > 0$ tale che la funzione $x(t)$ è soluzione della (14.12), nel senso della definizione 11.7, in un intervallo $J = [t_0 - a, t_0 + a]$. In particolare $x(t)$ è continua. Poiché anche h è continua, se $h(x_0) \neq 0$ si ha $h(x(t)) \neq 0$ $\forall t \in J$, se a è sufficientemente piccolo (cfr. l'esercizio 20). Sempre per il teorema 14.2 tale soluzione è unica, viste le ipotesi di regolarità della h.

Infine la soluzione $x(t)$ può essere prolungata in qualsiasi intervallo $(\alpha, \beta) \supset J$ purché $h(x(t)) \neq 0$ per ogni $t \in (\alpha, \beta)$: infatti in tale intervallo (α, β) il prolungamento è definito dalla stessa (14.14). ■

§15 Sistemi di equazioni differenziali di ordine qualsiasi

I risultati dei paragrafi precedenti si estendono facilmente al caso di sistemi di equazioni differenziali di ordine qualsiasi. Il corrispondente problema di Cauchy ammetterà però una soluzione unica purché si impongano condizioni iniziali non solo sulla funzione x, ma anche sulle sue prime $p - 1$ derivate (se p è l'ordine più alto delle derivate che appaiono nelle equazioni).

Per semplicità considereremo esplicitamente solo il caso in cui E sia uno spazio vettoriale reale unidimensionale, analogamente a quanto fatto nel caso di sistemi lineari, e le equazioni siano scritte in forma normale (cfr. la (11.5)).

Definizione 15.1 (Problema di Cauchy per equazioni differenziali di ordine qualsiasi) *Sia E un spazio vettoriale sia e $W \subset E$ un insieme aperto. Fissati $x_0 \in W$ e $x_j \in E$, $j = 1, \ldots, p-1$, il problema della determinazione delle soluzioni del sistema di equazioni differenziali di ordine p con condizioni iniziali*

$$\begin{cases} x^{(p)} = f(t, x, x^{(1)}, \ldots, x^{(p-1)}), \\ x(t_0) = x_0, \\ x^{(1)}(t_0) = x_1, \\ \ldots\ldots \\ x^{(p-1)}(t_0) = x_{p-1}, \end{cases} \tag{15.1}$$

con $f \colon I \times W \times E \times \ldots \times E \to E$, dove $I \subset \mathbb{R}$, prende il nome di problema di Cauchy *per il sistema considerato.*

Teorema 15.2 (Esistenza e unicità per equazioni differenziali di ordine qualsiasi) *Sia $W \subset E$ un sottoinsieme aperto di uno spazio vettoriale normato E, sia I un intervallo di $\mathbb{R}$ e sia $f \colon I \times W \times E \times \ldots \times E \to E$ una funzione continua in t e di classe C^1 nei suoi restanti argomenti. Siano $x_0 \in W$ e $x_j \in E$ $\forall j = 1, \ldots, p-1$. Allora esistono $a > 0$ e un'unica soluzione $u \colon J \to W$, con $J = [t_0 - a, t_0 + a]$, del problema di Cauchy* (15.1).

Dimostrazione. Ci si riconduce facilmente al caso delle equazioni differenziali del primo ordine, introducendo le variabili

$$y_1 = x, \quad y_2 = x^{(1)}, \quad \ldots, \quad y_p = x^{(p-1)},$$

e definendo

$$y = (y_1, \ldots, y_p) \in \mathcal{W} := W \times \underbrace{E \times \ldots \times E}_{p-1 \text{ volte}}, \qquad f(t, y) := f(t, y_1, \ldots, y_p).$$

Per costruzione si ha

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \dot{x} = x^{(1)} = y_2, \\ \dot{y}_2 = \dot{x}^{(1)} = x^{(2)} = y_3, \\ \ldots\ldots \\ \dot{y}_{p-1} = \dot{x}^{(p-2)} = x^{(p-1)} = y_p, \\ \dot{y}_p = \dot{y}^{(p-1)} = x^{(p)} = f(t, y_1, \ldots, y_p), \end{cases}$$

così che, definendo la funzione $F \colon \mathcal{W} \to E^p$ come

$$F(t, y) = (y_2, y_3, \ldots, y_p, f(t, y)),$$

si ottiene un sistema di equazioni differenziali del primo ordine

$$\begin{cases} \dot{y} = F(t, y), \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \tag{15.2}$$

dove si è posto $y_0 = (x_0, x_1, \dots, x_{p-1})$. Possiamo applicare il teorema 14.2 per concludere la dimostrazione. ■

§16 Dipendenza differenziabile dai dati iniziali

Nel presente paragrafo vedremo la dimostrazione del teorema di dipendenza differenziabile dai dati iniziali (cfr. il teorema 12.8). Si tratta del risultato tecnicamente più complicato del presente capitolo. Discutiamo alcuni risultati preliminari prima di passare alla dimostrazione del teorema (a pag. 150).

Teorema 16.1 (Dipendenza continua da parametri) *Sia $W \subset E$ un sottoinsieme aperto di uno spazio vettoriale normato E e sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo aperto dell'asse reale. Siano $f_1, f_2 \colon I \times W \to E$ due applicazioni localmente lipschitziane in x, tali che*

$$|f_1(t,x) - f_2(t,x)| < \varepsilon \qquad \forall (t,x) \in I \times W.$$

Se $u_1(t)$ e $u_2(t)$ risolvono rispettivamente i due problemi di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(t,x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \qquad \qquad \begin{cases} \dot{x} = f_2(t,x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

nello stesso intervallo di tempo $J \subset I$, con $t_0 \in J$, allora esiste una costante L tale che

$$|u_1(t) - u_2(t)| \le \frac{\varepsilon}{L} \left(\mathrm{e}^{L|t-t_0|} - 1 \right), \tag{16.1}$$

per ogni $t \in J$.

Dimostrazione. Sia W_0 un insieme compatto in W tale che $u_1(t) \in W_0$ $\forall t \in J$; sia L la costante di Lipschitz di f_1 in W_0. Per ogni $t \in J$, si ha

$$u_1(t) - u_2(t) = \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}s \, (\dot{u}_1(s) - \dot{u}_2(s)) = \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}s \, (f_1(s, u_1(s)) - f_2(s, u_2(s))) \, ,$$

così che

$$\begin{aligned} |u_1(t) - u_2(t)| \; &\le \; \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}s \, |f_1(s, u_1(s)) - f_1(s, u_2(s))| + \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}s \, |f_1(s, u_2(s)) - f_2(s, u_2(s))| \\ &\le \; L \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}s \, |u_1(s) - u_2(s)| + \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}s \, \varepsilon. \end{aligned} \tag{16.2}$$