così che, applicando due volte di seguito il teorema di Lagrange (cfr. l'esercizio 4 del capitolo 2), si trova che esistono ξ_1 ed ξ_2, compresi tra x_{01} e $x_{01}+t$ e tra x_{02} e $x_{02}+t$, rispettivamente, tali che

$$A(t) = \frac{g'(\xi_1)}{t} = \frac{1}{t}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1, x_{02}+t) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1, x_{02})\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\xi_1, \xi_2)$$

Analogamente si trova che esistono η_1 ed η_2, compresi tra x_{01} e $x_{01}+t$ e tra x_{02} e $x_{02}+t$, rispettivamente, tali che

$$A(t) = \frac{h'(\eta_2)}{t} = \frac{1}{t}\left(\frac{\partial h}{\partial x_2}(x_{01}+t, \eta_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_{01}, \eta_2)\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\eta_1, \eta_2)$$

Per $t \to 0$ si ha $\xi = (\xi_1, \xi_2) \to x_0$ ed $\eta = (\eta_1, \eta_2) \to x_0$. Poiché le derivate miste sono continue in x_0 per ipotesi, segue l'asserto.]

Esercizio 18 Si dimostri che sotto le ipotesi del teorema 13.14 esiste $\varepsilon > 0$ tale che la (13.18) è soddisfatta per ogni $t \in [t_0, t_1]$. [*Suggerimento.* Si ragiona per assurdo. Se l'asserto è falso, allora per ogni $\varepsilon = 1/k$ deve esistere $t_k \in [t_0, t_1]$ tale che l'intorno $B_{1/k}(u(t_k))$ contiene almeno un punto $z_k \notin W$. Poiché $E \setminus W$ è chiuso, da $\{z_k\}$ si può estrarre una sottosuccessione $\{z_{k_j}\}$ convergente a un punto $z_0 \notin W$. D'altra parte, poiché per $j \to \infty$ il raggio $1/k_j$ tende a zero, il punto z_0 deve essere sulla curva $t \mapsto u(t)$ e quindi appartenere a W.]

Esercizio 19 Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ e sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $x_0 \in A$. Si dimostri che se $f(x_0) > 0$, allora esiste $\delta > 0$ di x_0 tale che $f(x) > 0$ $\forall x \in B_\delta(x_0)$ (*teorema della permanenza del segno*). [*Soluzione.* Poiché f è continua in x_0, fissato $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ per $|x - x_0| < \delta$. Sia $a := f(x_0)$. Allora se $\varepsilon = a/2$ si ha $f(x) > f(x_0) - \varepsilon = a/2 > 0$.]

Esercizio 20 Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ e sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $x_0 \in A$. Si dimostri che se $a := f(x_0) \neq 0$, allora esiste $\delta > 0$ di x_0 tale che $\forall x \in B_\delta(x_0)$ si ha $2a > f(x) > a/2$ se $a > 0$ e $a/2 > f(x) > 2a$ se $a < 0$. [*Soluzione.* Si ragiona come nell'esercizio 19. Per esempio, se $a > 0$, poiché f è continua in x_0, fissato $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ per $|x - x_0| < \delta$. Se $\varepsilon = a/2$ si ottiene $a/2 > f(x) - f(x_0) > -a/2$ per $|x - x_0| < \delta$, da cui segue l'asserto.]

Esercizio 21 Si risolva il problema di Cauchy in $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} \dot{x} + 2tx = tx^3, \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

Cosa succede cambiando i dati iniziali? [*Soluzione.* Si ha $\varphi(t, 0) = 0$ $\forall t \in \mathbb{R}$. Se $x_0 = \pm\sqrt{2}$ si ha $\varphi(t, x_0) = x_0$. Se $x_0 \notin \{0, \pm\sqrt{2}\}$ si trova

$$\varphi(t, x_0) = \operatorname{sign} x_0 \left(\frac{1}{2} + \mathrm{e}^{2t^2}\left(\frac{1}{x_0^2} - \frac{1}{2}\right)\right)^{-1/2},$$

risolvendo per separazione di variabili.]

Esercizio 22 Data l'equazione differenziale in $\mathbb{R}$

$$\ddot{x} + x + x^3 = 0,$$

che descrive il moto di una molla su cui agisce una forza di richiamo non lineare, si dimostri che tutte le soluzioni sono definite globalmente. [*Suggerimento.* Si verifica che la quantità

$$H(x, \dot{x}) := \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4$$

è costante lungo le traiettorie $t \mapsto (x(t), \dot{x}(t))$, i.e. $H(x(t), \dot{x}(t))$ è costante in t; se c è il valore che essa assume, si ha $|x(t)|, |\dot{x}(t)| \leq \sqrt{2c}$. Si utilizza allora il corollario 13.13.]

Esercizio 23 Si consideri l'equazione differenziale $\dot{x} = x^2$ in $\mathbb{R}$. Si verifichi che la soluzione con dato iniziale $x_0 > 0$ è data da

$$x(t) = \frac{x_0}{1 - t x_0},$$

che è quindi definita per $|t| < 1/x_0$. Per ogni $y_0 > x_0$ la soluzione con dato iniziale y_0 è definita per $|t| < 1/y_0 < 1/x_0$. Si spieghi perché tale risultato non è in contraddizione con il teorema 13.14. [*Suggerimento.* Nel teorema 13.14 l'intervallo $[t_0, t_1]$ è chiuso. Comunque si consideri un intervallo chiuso $[t_0, t_1] \subset (-1/x_0, 1/x_0)$ si può fissare $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo perché $y_0 \in B_\varepsilon(x_0)$ sia tale che si abbia anche $[t_0, t_1] \subset (-1/y_0, 1/y_0)$.]

Esercizio 24 Si consideri il problema di Cauchy in $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 + (x - t)^2, \\ x(0) = -\lambda, \end{cases}$$

al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$. Si determini l'intervallo di definizione della soluzione. [*Suggerimento.* Si cercano soluzioni nella forma $x(t) = t + y(t)$: si trova che $y(t)$ deve risolvere l'equazione autonoma $\dot{y} = y^2$ con condizioni iniziali $y(0) = -\lambda$. Quindi (cfr. l'esercizio 23), se $\lambda \neq 0$ si ha $x(t) = t - \lambda(1 + t\lambda)^{-1}$, che è definita per $t \in (-1/\lambda, +\infty)$ se $\lambda > 0$ e per $t \in (-\infty, -1/\lambda)$ se $\lambda < 0$. Se invece $\lambda = 0$ si ha $x(t) = t$, che è definita per ogni $t \in \mathbb{R}$.]

Esercizio 25 Si risolva il problema di Cauchy in $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} \dot{x} = x \cos t, \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

[*Soluzione.* Si ha $\varphi(t, x_0) = x_0 \exp \sin t$.]

Esercizio 26 Si risolva il problema di Cauchy in $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} \dot{x} = 2t\left(1 + x^2\right), \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

[*Soluzione.* Si ha $\varphi(t, 0) = \tan t^2$.]

Esercizio 27 Si risolva il problema di Cauchy in $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} \dot{x} = 4x\left(x^2 - 1\right), \\ x(0) = 1/\sqrt{2}. \end{cases}$$

[*Soluzione.* Si ha $\varphi(t, 1/\sqrt{2}) = 1/\sqrt{1 + \exp 8t}$.]

Esercizio 28 Si risolva il problema di Cauchy in $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} \dot{x} = 2tx^3, \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Si determini l'intervallo massimale in cui è definita la soluzione. [*Soluzione.* Si ha

$$\varphi(t, x_0) = \frac{x_0}{\sqrt{1 - 2t^2 x_0^2}}.$$

Se $x_0 = 0$ la soluzione è definita per ogni $t \in \mathbb{R}$. Se $x_0 \neq 0$, la soluzione è definita per $|t| < T := 1/\sqrt{2x_0^2}$, quindi in tal caso l'intervallo massimale è $(-T, T)$.]

Esercizio 29 Si risolva il problema di Cauchy in $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} \dot{x} = 4tx + t\sqrt{x}, \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

[*Soluzione.* Per $x_0 > 0$ si ha

$$\varphi(t, x_0) = \frac{1}{16} \left[(1 + 4\sqrt{x_0}) \mathrm{e}^{t^2} - 1 \right]^2.$$

Per $x_0 < 0$ il problema non ammette soluzioni. Per $x_0 = 0$ il campo vettoriale non è lipschitziano.]

Esercizio 30 Si risolva il problema di Cauchy in $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{x(1+x^2)}{t(1-x^2)}, \\ x(1) = 2. \end{cases}$$

[*Soluzione.* Si ha

$$x(t) = \frac{1}{4t} \left(5 + \sqrt{25 - 16t^2} \right),$$

per $t \in (0, 5/4)$. Si noti che per $t \to 5/4$ si ha $x(t) \to 1$, ma $\dot{x}(t) \to -\infty$ (in accordo con il fatto che il campo vettoriale diverge per $x \to 1$).]

Esercizio 31 Si risolva il problema di Cauchy in $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{2tx}{t^2 - x^2}, \\ x(1) = 2. \end{cases}$$

[*Suggerimento.* Con il cambiamento di variabile $x(t) = ty(t)$ il problema si riconduce al problema di Cauchy dell'esercizio 30.]

Esercizio 32 Si risolva il problema di Cauchy in $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} \dot{x} = \sqrt{\dfrac{1+x}{1+t^2}}, \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

[*Soluzione.* Si ha

$$x(t) = \left(\sqrt{1 + x_0} - \frac{1}{2} \log \left(\sqrt{1 + t^2} - t \right) \right)^2 - 1,$$

purché $x_0 > -1$ e $t \in [t_*, \infty)$, con $t_* < 0$ tale che $\sqrt{1 + t_*^2} + |t_*| = \exp(2\sqrt{1 + x_0})$.]

Esercizio 33 Si risolva il problema di Cauchy in $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{1+x^2}{1+t^2}, \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

Cosa succede per condizioni iniziali $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}$? [*Soluzione.* Si vede subito che $x(t) = t$ risolve il problema di Cauchy con $x(0) = 0$. Per $x(0) = x_0 \neq 0$ la soluzione è $x(t) = \tan(\arctan x_0 + \arctan t)$.]

Esercizio 34 Si consideri il problema di Cauchy in $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} \dot{x} = |x|, \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

(1) Quante soluzioni esistono?
(2) Si trovi esplicitamente una soluzione e se ne discuta la regolarità in t.
[*Suggerimento.* La funzione $x \mapsto |x|$ è lipschitziana, quindi la soluzione esiste ed è unica. Si verifica facilmente che $x(t) = \mathrm{e}^t x_0$ se $x_0 \geq 0$ e $x(t) = \mathrm{e}^{-t} x_0$ se $x_0 < 0$.]

Esercizio 35 Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,t), \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

con $f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è di classe C^1. Sia $u : J \to E$ una soluzione massimale.
(1) Si dimostri che J è un intervallo aperto: $J = (\alpha, \beta)$ con $\alpha < 0 < \beta$.
(2) Si risolva l'equazione nel caso

$$f(x,t) = -\frac{6t^2 + 8t + 3}{2x(1+t)^2(1+2t)^2}, \qquad x(0) = 1,$$

e si dimostri che la funzione $u(t)$ è definita per $t \to \beta^-$.
(3) Si spieghi perché il punto (2) non è in contraddizione con il punto (1).
[*Suggerimento.* Per il punto (1) si tenga presente l'osservazione 13.10. Per il punto (2), il sistema si risolve per separazione di variabili: si trova

$$x(t) = \left(\frac{1 - 2t^2}{1 + 3t + 2t^2} \right)^{1/2}, \qquad t \in \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

La funzione $x(t)$ trovata al punto (2) risulta definita ma non derivable in $t = \beta = 1/\sqrt{2}$, quindi non risolve l'equazione in $t = \beta$: questo risponde alla questione sollevata al punto (3).]

Esercizio 36 Sia $\varphi\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ una curva differenziabile e sia γ il suo sostegno; si definisce *lunghezza della curva* la quantità

$$\ell(\gamma) = \int_\alpha^\beta \mathrm{d}t\, |\dot{\varphi}(t)|, \qquad |\dot{\varphi}(t)| = \sqrt{\dot{\varphi}_1^2(t) + \ldots + \dot{\varphi}_n^2(t)},$$

dove $|\dot{\varphi}(t)|$ è la norma euclidea del vettore $\dot{\varphi}(t) = [\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t](t)$. Diremo che la curva differenziabile $\psi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ è una *riparametrizzazione* della curva $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ (ovvero che φ e ψ sono due