4 | Analisi qualitativa del moto

§17 Stabilità secondo Ljapunov

Nello studio di un sistema dinamico, in generale, non è possibile calcolare analiticamente la soluzione per ogni dato iniziale (cfr. pag. 113). Tuttavia molte proprietà di un sistema dinamico possono essere studiate senza determinare esplicitamente l'insieme di tutte le traiettorie: si definisce *analisi qualitativa* lo studio di tali proprietà.

Alcune proprietà sono di carattere locale, interessano cioè il comportamento qualitativo delle soluzioni in una ristretta regione dello spazio in cui si svolge il moto. Esempi sono il comportamento nelle vicinanze di un punto di equilibrio o lontano dai punti di equilibrio; i due casi porteranno, rispettivamente, alla nozione di stabilità e al teorema della scatola di flusso. In entrambi i casi si caratterizza il moto fin tanto che non ci allontani troppo dai dati iniziali, indipendentemente da cosa possa succedere se e quando ce ne si allontani. Altre proprietà sono invece di natura globale, interessano cioè il comportamento del sistema non in un intorno del dato iniziale, ma in una regione estesa. Come esempi vedremo più avanti l'individuazione di traiettorie limitate o, più in particolare, traiettorie periodiche o asintotiche, quali i cicli limite, o lo studio delle curve di livello.

Consideriamo un sistema dinamico

$$\dot{x} = f(x), \tag{17.1}$$

dove $x \in \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è un campo vettoriale di classe C^1 e $\dot{x} = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$.

Più in generale il dominio di definizione di f può essere un sottoinsieme $A \subset \mathbb{R}^n$; l'analisi che segue può essere estesa a tale caso, sotto analoghe ipotesi di regolarità del campo vettoriale, senza ulteriori difficoltà.

Potremmo considerare anche $x \in \Sigma$, dove Σ è una varietà differenziabile, e $f : \Sigma \to T\Sigma$, i.e. $f(x) \in T_x\Sigma$, se $T_x\Sigma$ è lo spazio tangente a Σ in x e $T\Sigma$ è il fibrato tangente. Rimandiamo al capitolo 11 per una discussione più dettagliata; si noti in ogni caso che in tutto il primo volume non si fa mai esplicitamente riferimento a varietà. Infatti a noi interesseranno prevalentemente proprietà locali, quindi non sarà restrittivo lavorare in $\mathbb{R}^n$ (possiamo sempre supporre di aver fissato una carta opportuna). Di fatto studieremo proprietà globali in dettaglio per lo più per sistemi definiti in $\mathbb{R}^n$. In generale chiameremo *spazio delle fasi* (o anche *piano delle fasi* se $n = 2$) l'insieme in cui x è definito.

Ricordiamo alcune notazioni introdotte nei capitoli precedenti. Dato il sistema (17.1), indichiamo con $\varphi(t, \bar{x})$ la soluzione con dato iniziale $\bar{x}$: questo vuol dire che $\varphi(0, \bar{x}) = \bar{x}$ e la funzione $\varphi(t, \bar{x})$ risolve l'equazione (17.1). L'insieme delle traiettorie $\varphi(t, x)$, al variare dei dati iniziali $x \in \mathbb{R}^n$, si chiama *flusso* del sistema dinamico (17.1); il flusso gode della proprietà di gruppo $\varphi(t + s, x) = \varphi(t, \varphi(s, x))$.

Definizione 17.1 (Traiettoria periodica) *Sia (A, φ) un sistema dinamico. Una traiettoria $\varphi(t, x)$ si dice* periodica *se esiste $T > 0$ tale che $\varphi(t + T, x) = \varphi(t, x)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Il valore minimo di T per cui questo avviene prende il nome di* periodo.

Osservazione 17.2 La definizione data di periodo è ben posta. Infatti il periodo di una traiettoria non dipende dal punto x scelto come dato iniziale: se $y = \varphi(t_0, x)$ per qualche $t_0 \in \mathbb{R}$, allora si ha parimenti $\varphi(t + T, y) = \varphi(t, y)$ (cfr. l'esercizio 2).

Osservazione 17.3 Una traiettoria periodica è una curva chiusa (cfr. l'esercizio 1). Diremo che un'orbita è *chiusa* se è il sostegno di una traiettoria periodica.

Definizione 17.4 (Insieme invariante) *Sia (A, φ) un sistema dinamico. Un insieme $S \subset A$ si dice* invariante *(rispetto al flusso) se, per ogni $x \in S$, si ha $\varphi(t, x) \in S$ $\forall t$ per cui la traiettoria sia definita; si dice* positivamente invariante *se, per ogni $x \in S$, si ha $\varphi(t, x) \in S$ $\forall t \geq 0$ per cui la traiettoria sia definita; si dice* negativamente invariante *se, per ogni $x \in S$, si ha $\varphi(t, x) \in S$ $\forall t \leq 0$ per cui la traiettoria sia definita.*

Dati due punti $x, y \in \mathbb{R}^n$ indichiamo con $|x - y|$ la *distanza* tra i due punti, essendo $|\cdot|$ la norma indotta da un opportuno prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ in $\mathbb{R}^n$ (cfr. il §3). Tipicamente lavoreremo con il prodotto scalare standard (cfr. la definizione 1.29) e la norma sarà quindi la norma euclidea:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j, \quad x, y \in \mathbb{R}^n, \qquad |x|^2 = \sum_{j=1}^{n} x_j^2, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{17.2}$$

Indichiamo con $B(x)$ un intorno del punto x; se vorremo precisare che l'intorno ha raggio $\varepsilon > 0$ scriveremo $B_\varepsilon(x)$; quindi $B_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| < \varepsilon\}$. Dato un insieme $A \subset \mathbb{R}^n$ denotiamo con ∂A la sua frontiera; in particolare $\partial B_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| = \varepsilon\}$. Definiamo l'*operatore gradiente* come

$$\nabla := \frac{\partial}{\partial x} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right). \tag{17.3}$$

Data una funzione $W \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ di classe C^1, consideriamo i valori che la funzione W assume lungo una traiettoria $\varphi(t, \bar{x})$. La derivata

$$\dot{W}(\varphi(t, \bar{x})) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} W(\varphi(t, \bar{x})) = \langle \nabla W(\varphi(t, \bar{x})), f(\varphi(t, \bar{x})) \rangle = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial W(\varphi(t, \bar{x}))}{\partial x_j} f_j(\varphi(t, \bar{x}))$$

prende il nome di *derivata sostanziale* (o *derivata totale rispetto al tempo*) di W. Poniamo anche

$$\dot{W}(x) := \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} W(\varphi(t,x))\right|_{t=0} . \tag{17.4}$$

Per calcolare la funzione $\dot{W}(x)$ si deve quindi prima trovare la soluzione $\varphi(t,x)$ e poi calcolare la derivata rispetto a t di $W(\varphi(t,x))$ a $t=0$. Per esempio, se $\dot{x}=x$ in $\mathbb{R}$ e $W(x)=x^2$, si ha $\dot{W}(x)=2x^2$; se $\dot{x}_1=x_2$, $\dot{x}_2=-x_1$ in $\mathbb{R}^2$ e $W(x)=x_1^2+x_2^2$, si ha $\dot{W}(x)=0$.

In generale, la funzione W è una *costante del moto* (o *integrale primo*) se $\dot{W}(x)=0$ per ogni $x\in\mathbb{R}^n$, i.e. se $W(\varphi(t,x))$ si mantiene costante lungo ogni traiettoria $\varphi(t,x)$.

Definizione 17.5 (Omeomorfismo) *Dati due insiemi $A,B\subset\mathbb{R}^n$, si definisce* omeomorfismo *un'applicazione $f\colon A\to B$ continua e invertibile, con inversa continua. In tal caso si dice che A e B sono* omeomorfi*.*

Definizione 17.6 (Superficie) *Siano $m,n\in\mathbb{N}$ con $m<n$. Una* superficie *in $\mathbb{R}^n$ di dimensione m (o* codimensione *$m-n$) è un sottoinsieme S di $\mathbb{R}^n$ tale che per ogni $p\in S$ esistono un intorno $V\subset\mathbb{R}^n$ di p e un intorno U di $\mathbb{R}^m$ tali che $V\cap S$ e U sono omeomorfi. La superficie S si dice* differenziabile *se l'omeomorfismo $\varphi\colon U\to V\cap S$ è differenziabile; si dice di classe C^k se φ è di classe C^k. La superficie S si dice* regolare *se è differenziabile e se i vettori $\partial\varphi(x)/\partial x_1,\ldots,\partial\varphi(x)/\partial x_m$ sono linearmente indipendenti per ogni $x\in U$. Un vettore $v(x)$ ortogonale a una superficie regolare in un suo punto x si dice* normale *alla superficie; la direzione che esso individua si chiama* normale *alla superficie in x.*

Se $H:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ è una funzione di classe C^1 (per esempio, ma non necessariamente, una costante del moto per il sistema (17.1)), le superfici descritte dall'equazione $H(x)=c$, al variare di $c\in\mathbb{R}$,

$$\Sigma_c := \{x\in\mathbb{R}^n : H(x)=c\}, \tag{17.5}$$

prendono il nome di *superfici di livello*. Le superfici di livello sono superfici di codimensione 1, regolari (di classe C^k se H è di classe C^k) in tutti i punti x in cui $\nabla H(x)\neq 0$ (cfr. l'esercizio 7). In $\mathbb{R}^2$ parleremo di *curve di livello*, anche se, strettamente parlando, le curve di livello non sono necessariamente "curve" – intese nel senso di sostegni (cfr. le osservazioni 11.12 e 11.13) –, perché possono essere costituite da più componenti connesse (cfr. la definizione 17.19 più avanti) e non sono quindi continue ovunque.

Definizione 17.7 (Punto di equilibrio) *Si chiama* punto di equilibrio *(o* punto critico*) del sistema* (17.1) *un punto $x_0\in\mathbb{R}^n$ tale che $f(x_0)=0$.*

Osservazione 17.8 La nozione di punto critico di un sistema dinamico non deve essere confusa con quella di punto critico di una funzione: data una funzione $f\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ si chiamano *punti critici* (o *punti stazionari*) i punti $x\in\mathbb{R}^n$ in cui si annulla il gradiente di f, i.e. tali che $[\partial f/\partial x_k](x)=0\ \forall k=1,\ldots,n$, e *valori critici* i valori che la funzione assume in corrispondenza dei suoi punti critici.

Osservazione 17.9 Se x_0 è un punto di equilibrio per il sistema (17.1), allora $\varphi(t, x_0) = x_0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Infatti $\varphi(t, x_0) = x_0$ è soluzione di (17.1) con dato iniziale x_0 e, per il teorema 11.27 (teorema di unicità), è anche l'unica soluzione possibile.

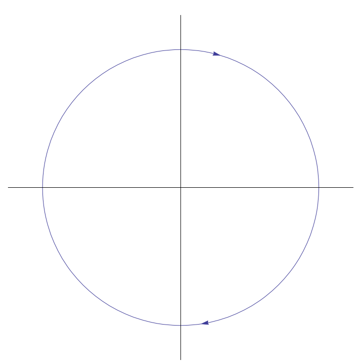
Definizione 17.10 (Stabilità secondo Ljapunov) *Dato un punto di equilibrio x_0 per il sistema* (17.1)*, diremo che*

1. x_0 è stabile secondo Ljapunov *(o* stabile *tout court) se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che se $|\bar{x} - x_0| < \delta$ allora $|\varphi(t, \bar{x}) - x_0| < \varepsilon$ per ogni $t \geq 0$;*
2. x_0 è instabile *se non è stabile, cioè se esiste $\varepsilon > 0$ tale che per ogni $\delta > 0$ esistono $\bar{x} \in B_\delta(x_0)$ e $t_1 > 0$ tali che $|\varphi(t_1, \bar{x}) - x_0| \geq \varepsilon$;*
3. x_0 è attrattivo *se esiste un intorno $B(x_0)$ tale che, per ogni $\bar{x} \in B(x_0)$, si ha*
$$\lim_{t \to +\infty} |\varphi(t, \bar{x}) - x_0| = 0; \qquad (17.6)$$
4. x_0 è asintoticamente stabile *se è un punto di equilibrio stabile e attrattivo.*

Infine, dato un punto di equilibrio attrattivo x_0, chiameremo bacino d'attrazione *di x_0 l'insieme aperto massimale dei punti $\bar{x}$ per i quali la* (17.6) *sia soddisfatta.*

Osservazione 17.11 Un punto di equilibrio può essere attrattivo senza essere asintoticamente stabile. Un controesempio è il seguente. Consideriamo il sistema dinamico descritto dall'equazione $\dot{\theta} = \cos\theta - 1$, con $\theta \in \mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ (cioè $\mathbb{R}$ definito modulo 2π). L'equazione differenziale considerata si integra immediatamente: la soluzione dell'equazione con dato iniziale $\bar{\theta} \in (0, /2\pi)$, graficata nella figura 4.1, è data da (cfr. l'esercizio 8)

$$\varphi(t, \bar{\theta}) = 2\mathrm{arccot}[t + \cot(\bar{\theta}/2)]. \qquad (17.7)$$



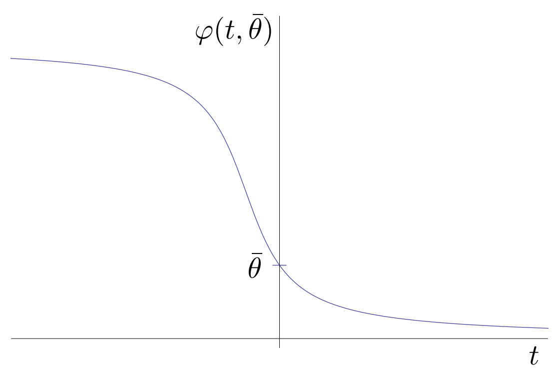


Figura 4.1: Sistema dinamico descritto dall'equazione $\dot{\theta} = \cos\theta - 1$ e grafico della soluzione (17.7).

Si vede che, comunque venga scelto $\bar{\theta}$, si ha $\lim_{t\to+\infty}\varphi(t,\bar{\theta}) = 0$, quindi $\theta = 0$ è attrattivo (e il suo bacino d'attrazione è $\mathbb{T}$). Tuttavia si vede anche che comunque sia scelto $\varepsilon > 0$ è possibile trovare $\delta > 0$ tale che, se $\bar{\theta} \in (-\delta, 0) \subset B_\delta(0)$, allora esiste un tempo finito t_1 tale che $\varphi(t_1,\bar{\theta}) \notin B_\varepsilon(0)$. Quindi $\theta = 0$ non è stabile.

Definizione 17.12 (Insieme limite) *Dato $x \in \mathbb{R}^n$, definiamo l'*insieme ω-limite *di x come l'insieme*

$$L_\omega(x) := \{y \in \mathbb{R}^n \,:\, \exists t_1 \le t_2 \le \ldots \le t_k \to +\infty \text{ tale che } \lim_{k\to\infty} |\varphi(t_k,x) - y| = 0\},$$

*dove $\{t_k\}$ è una successione monotona di tempi che tende a $+\infty$. Analogamente definiamo l'*insieme α-limite *di x come l'insieme*

$$L_\alpha(x) := \{y \in \mathbb{R}^n \,:\, \exists t_1 \ge t_2 \ge \ldots \ge t_k \to -\infty \text{ tale che } \lim_{k\to\infty} |\varphi(t_k,x) - y| = 0\},$$

dove $\{t_k\}$ è una successione monotona di tempi che tende a $-\infty$.

Esempio 17.13 Esempi di insiemi limite per sistemi dinamici (17.1) sono i punti di equilibrio asintoticamente stabili nella definizione 17.10 e i cicli limite che saranno definiti più avanti (cfr. la definizione 21.10). Se la traiettoria che parte da un punto x è periodica, ogni punto lungo la traiettoria, e quindi l'orbita stessa contenente x, appartiene all'insieme ω-limite e all'insieme α-limite di x.

Ricordiamo ora alcuni risultati elementari di analisi che saranno utilizzati nel seguito (cfr. anche la nota bibliografica).

Lemma 17.14 *Date due successioni reali positive $\{t_k\}$ e $\{a_k\}$, la prima monotona divergente, esiste sempre una sottosuccessione $\{t_{k_j}\}$ di $\{t_k\}$, monotona divergente e tale che $|t_{k_{j+1}} - t_{k_j}| > a_j$ $\forall j \in \mathbb{N}$.*

Dimostrazione. Si definisce la sottosuccessione $\{\tau_j\} := \{t_{k_j}\}$ ricorsivamente nel modo seguente. Si fissa $\tau_1 \in \{t_k\}$ arbitrariamente. Dato τ_j, $j \ge 1$, si pone $\tau_{j+1} = \min_{k\in\mathbb{N}}\{t_k : t_k > \tau_j + a_j\}$. Tale definizione ha senso poiché, per definizione di limite, per ogni $M > 0$ esiste k_0 tale che $\forall k > k_0$ si ha $t_k > M$: fissato j basta scegliere $M = \tau_j + a_j$. Infine la sottosuccessione $\{\tau_j\}$ è divergente perché è estratta da una successione divergente (cfr. l'esercizio 7 del capitolo 1). ■

Corollario 17.15 *Data una successione reale $\{t_k\}$ monotona divergente, per ogni $a > 0$ esiste una sottosuccessione $\{t_{k_j}\}$ monotona divergente tale che $|t_{k_{j+1}} - t_{k_j}| > a$ $\forall j \in \mathbb{N}$.*

Dimostrazione. Si scelga $a_k = a$ $\forall k$ nel lemma 17.14. ■

Lemma 17.16 *Date due successioni reali monotone divergenti $\{t_k\}$ e $\{s_k\}$, esistono sempre due sottosuccessioni $\{s_{k_j}\}$ e $\{t_{k_j}\}$ tali che $t_{k_j} < s_{k_j} < t_{k_{j+1}}$ $\forall j \in \mathbb{N}$.*